N. PISKUNOV

cálculo diferencial e integral

tomo I

Editorial Mir Moscú

CAPITULO X. INTEGRAL INDEFINIDA

CAPITULO XI. INTEGRAL DEFINIDA

CAPITULO XII. APLICACIONES GEOMETRICAS Y MECANICAS DE LA INTEGRAL DEFINIDA

CAPITULO X

INTEGRAL INDEFINIDA

§ 1. FUNCION PRIMITIVA E INTEGRAL INDEFINIDA

En el capítulo III hemos estudiado el problema siguiente: dada una función $F(x)$, hallar su derivada, es decir, la función $f(x) = F'(x)$.

En el capítulo presente consideremos el problema inverso: dada *una función $f(x)$, es preciso hallar una función $F(x)$* cuya derivada sea igual a $f(x)$, es decir,

$$F'(x) = f(x).$$

Definición 1. *Si en todos los puntos del segmento $[a, b]$ se verifica la ecuación*

$$F'(x) = f(x)$$

la función $F(x)$ se llama primitiva de la función $f(x)$ sobre este segmento.

Ejemplo. Hallar una función primitiva de la función $f(x) = x^2$. De la definición de función primitiva se deduce que la función $F(x) = \frac{x^3}{3}$ es primitiva de la $f(x)$, puesto que $\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2$.

Es fácil ver que si la función dada $f(x)$ tiene una función primitiva, ésta no es la única. Así, en el ejemplo citado como funciones primitivas podrían figurar las siguientes: $F(x) = \frac{x^3}{3} + 1$; $F(x) = \frac{x^3}{3} - 7$, o, en general $F(x) = \frac{x^3}{3} + C$ (donde C es una constante arbitraria) puesto que:

$$\left(\frac{x^3}{3} + C\right)' = x^2.$$

Por otra parte se puede demostrar que las funciones del tipo $\frac{x^3}{3} + C$ abarcan todas las funciones primitivas de la función x^2. Esto se deduce del teorema siguiente.

Teorema: *Si $F_1(x)$ y $F_2(x)$ son dos funciones primitivas de la funcion $f(x)$ sobre el segmento $[a, b]$, su diferencia es una constante.*

Demostración. En virtud de la definición de la función primitiva tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} F_1'(x) = f(x) \\ F_2'(x) = f(x) \end{array}\right\} \tag{1}$$

para todo valor de x en el segmento $[a, b]$.

Designemos:

$$F_1(x) - F_2(x) = \varphi(x). \tag{2}$$

Según las igualdades (1), tenemos:

$$F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

ó

$$\varphi'(x) = [F_1(x) - F_2(x)]' \equiv 0$$

para todo valor de x en el segmento $[a, b]$. Pero, de la igualdad $\varphi'(x) = 0$ se deduce que $\varphi(x)$ es una constante.

En efecto, apliquemos el teorema de Lagrange (véase § 2, cap. IV) a la función $\varphi(x)$ que es, evidentemente, continua y derivable en el segmento $[a, b]$. En virtud del teorema de Lagrange, para todo x arbitrario del segmento $[a, b]$ tenemos:

$$\varphi(x) - \varphi(a) = (x - a)\,\varphi'(\xi),$$

donde

$$a < \xi < x.$$

Puesto que $\varphi'(\xi) = 0$, entonces:

$$\varphi(x) - \varphi(a) = 0$$

ó

$$\varphi(x) = \varphi(a). \tag{3}$$

Así, la función $\varphi(x)$, en todo punto x del segmento $[a, b]$ conserva el valor igual a $\varphi(a)$, lo que quiere decir que esta función es constante en el segmento $[a, b]$. Designemos la constante $\varphi(a)$ por C, de las igualdades (2) y (3) obtenemos:

$$F_1(x) - F_2(x) = C.$$

Del teorema demostrado se deduce que si conocemos cualquier función primitiva $F(x)$, de la función $f(x)$ entonces toda otra función primitiva de $f(x)$ tiene la forma $F(x) + C$, donde $C = \text{const}$.

Definición 2. Si $F(x)$ es una función primitiva de $f(x)$, la expresión $F(x) + C$ se llama *integral indefinida* de la función $f(x)$ y se designa mediante el símbolo $\int f(x)\,dx$. De tal modo, según la definición:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

si

$$F'(x) = f(x).$$

En este caso, $f(x)$ *se llama integrando o función bajo el signo de integral*; $f(x)\,dx$, *elemento de integración o la expresión bajo el signo de integral y el símbolo* $\int$, *signo de integral.*

Así, la integral indefinida representa una familia de funciones $y = F(x) + C$.

El significado geométrico de la integral indefinida es un conjunto (familia) de curvas, cada una de las cuales se obtiene mediante el desplazamiento de una curva paralelamente a sí misma hacia arriba o hacia abajo, es decir, a lo largo del eje Oy.

Naturalmente surge una cuestión: ¿si toda $f(x)$ tiene funciones primitivas (y, por consiguiente, integral indefinida)? La respuesta es negativa. Sin embargo, notemos, por ahora sin demostración, *que toda función $f(x)$ continua en el segmento $[a, b]$ tiene una función primitiva (y, por tanto, una integral indefinida).*

En el capítulo presente vamos a estudiar los métodos que permiten determinar las funciones primitivas (y por consiguiente las integrales indefinidas) de ciertas clases de funciones elementales.

El proceso que permite hallar la función primitiva de una función $f(x)$ se llama *integración de la función $f(x)$.*

Observemos lo siguiente: mientras que la derivada de una función elemental es siempre una función elemental, la primitiva de una función elemental puede no expresarse mediante un número finito de funciones elementales. Estudiemos más detalladamente este problema al final del presente capítulo.

De la definición 2 se deduce:

1. *La derivada de una integral indefinida es igual al integrando, es decir, si $F'(x) = f(x)$, entonces:*

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = (F(x) + C)' = f(x). \tag{4}$$

Esta última igualdad significa que la derivada de una primitiva cualquiera es igual al integrando.

2. *La diferencial de una integral indefinida es igual al elemento de integración*

$$d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx. \tag{5}$$

Esto se deduce de la fórmula (4).

3. *La integral indefinida de la diferencial de una cierta función es igual a la suma de esta función y de una constante arbitraria*

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

Es fácil comprobar que esta igualdad es válida mediante la derivación (las diferenciales de ambos miembros de la igualdad son iguales a $dF(x)$).

§ 2. TABLA DE INTEGRALES

Antes de proceder a la exposición de los métodos de integración daremos una tabla de integrales de las funciones elementales.

La tabla de integrales se deduce inmediatamente de la definición 2 § 1, cap. X, y de la tabla de las derivadas (§ 15, cap. III). (Es fácil comprobar que las igualdades de la tabla son válidas mediante la derivación, es decir, se puede verificar que la derivada del segundo miembro es igual al integrando).

1. $\int x^{\alpha}\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ $(\alpha \neq -1)$. (Aquí y en las fórmulas siguientes C designa una constante arbitraria).

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$

3. $\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C.$

4. $\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C.$

5. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$

6. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x} = -\operatorname{cotg} x + C.$

7. $\int \operatorname{tg} x\,dx = -\ln|\cos x| + C.$

8. $\int \operatorname{cotg} x\,dx = \ln|\operatorname{sen} x| + C.$

9. $\int e^x\,dx = e^x + C.$

10. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$

11. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C.$

11'. $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C.$

12. $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C.$

13. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsen} x + C.$

13'. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \operatorname{arcsen}\frac{x}{a} + C.$

14. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C.$

Observación. En la tabla de las derivadas (§ 15, cap. III) no hay fórmulas que correspondan a las 7, 8, 11', 12, 13' y 14. Sin embargo, es fácil comprobar que estas fórmulas son válidas mediante la derivación.

En el caso de la fórmula 7 tenemos:

$$(-\ln|\cos x|)' = -\frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x} = \operatorname{tg} x,$$

por tanto, $\int \operatorname{tg} x\, dx = -\ln|\cos x| + C.$

En el caso de la fórmula 8 tenemos:

$$(\ln|\operatorname{sen} x|)' = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \operatorname{cotg} x,$$

por tando, $\int \operatorname{cotg} x = \ln|\operatorname{sen} x| + C.$

En caso de la fórmula 12 tenemos:

$$\left(\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|\right)' = \frac{1}{2a}[\ln|a+x| - \ln|a-x|]' =$$

$$= \frac{1}{2a}\left[\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x}\right] = \frac{1}{a^2-x^2},$$

por tanto,

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C.$$

Notemos que la última fórmula se deduce también de los resultados generales del § 9, cap. X.

En el caso de la fórmula 14 tenemos:

$$(\ln|x+\sqrt{x^2\pm a^2}|)'=\frac{1}{x+\sqrt{x^2\pm a^2}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2\pm a^2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}$$

por tanto

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\ln|x+\sqrt{x^2\pm a^2}|+C.$$

Esta fórmula también se deduce de los resultados generales del § 11.

De la manera análoga se verifican las fórmulas 11′ y 13′. Observemos que estas fórmulas serán obtenidas en lo ulterior de las fórmulas 11 y 13 (véase § 4, ejemplos 3 y 4).

§ 3. ALGUNAS PROPIEDADES DE LA INTEGRAL INDEFINIDA

Teorema 1. *La integral indefinida de la suma algebraica de dos o varias funciones es igual a la suma algebraica de sus integrales*

$$\int[f_1(x)+f_2(x)]\,dx=\int f_1(x)\,dx+\int f_2(x)\,dx. \tag{1}$$

Para demostrar el teorema hallemos las derivadas del primero y segundo miembros de esta igualdad (1). En virtud de la igualdad (4) del párrafo anterior hallamos:

$$\left(\int[f_1(x)+f_2(x)]\,dx\right)'=f_1(x)+f_2(x),$$

$$\left(\int f_1(x)\,dx+\int f_2(x)\,dx\right)'=\left(\int f_1(x)\,dx\right)'+\left(\int f_2(x)\,dx\right)'=f_1(x)+f_2(x).$$

Así, la derivada del primer miembro de la igualdad (1) es igual a la derivada del segundo miembro, es decir, la derivada de cualquier función primitiva del primer miembro es igual a la derivada de una función arbitraria del segundo miembro. Por consiguiente, según el teorema § 1 cap. X, toda función del primer miembro de la igualdad (1) se diferencia de toda función del segundo miembro de esta igualdad en un sumando constante. La igualdad (1) tiene precisamente este significado.

Teorema 2. *El factor constante se puede sacar fuera del signo de la integral, es decir, si* $a=$ const, *entonces:*

$$\int af(x)\,dx=a\int f(x)\,dx. \tag{2}$$

Para demostrar la igualdad (2), derivemos ambos miembros:

$$\left(\int af(x)\,dx\right)'=af(x),$$

$$\left(a\int f(x)\,dx\right)'=a\left(\int f(x)\,dx\right)'=af(x).$$

Las derivadas de ambos miembros son iguales, por consiguiente, lo mismo que en la igualdad (1), la diferencia de dos funciones cualesquiera, *dispuestas a la derecha y a la izquierda, es una constante*. La igualdad (2) tiene precisamente este significado.

Durante el cálculo de las integrales indefinidas es útil tener en cuenta las reglas siguientes.

I. Si:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

entonces:

$$\int f(ax)\,dx = \frac{1}{a} F(ax) + C. \tag{3}$$

En efecto, derivando ambos miembros de la igualdad (3), obtenemos:

$$\left(\int f(ax)\,dx\right)' = f(ax),$$

$$\left(\frac{1}{a} F(ax)\right)' = \frac{1}{a}(F(ax))'_x = \frac{1}{a} F'(ax)\,a = F'(ax) = f(ax).$$

Las derivadas de los dos miembros son iguales, lo que se trataba de demostrar:

II. Si

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C\cdot$$

entonces:

$$\int f(x+b)\,dx = F(x+b) + C. \tag{4}$$

III. Si

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

entonces:

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C. \tag{5}$$

Las igualdades (4) y (5) se demuestran mediante la derivación de sus miembros.

Ejemplo 1.

$$\int (2x^3 - 3\operatorname{sen} x + 5\sqrt{x})\,dx = \int 2x^3\,dx - \int 3\operatorname{sen} x\,dx + \int 5\sqrt{x}\,dx =$$

$$= 2\int x^3\,dx - 3\int \operatorname{sen} x\,dx + 5\int x^{\frac{1}{2}}\,dx = 2\,\frac{x^{3+1}}{3+1} - 3(-\cos x) +$$

$$+ 5\,\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{1}{2}x^4 + 3\cos x + \frac{10}{3}\,x\sqrt{x} + C.$$

Ejemplo 2.

$$\int \left(\frac{3}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}} + x\sqrt[4]{x} \right) dx = 3\int x^{-\frac{1}{3}}\, dx + \frac{1}{2}\int x^{-\frac{1}{2}}\, dx +$$

$$+ \int x^{\frac{5}{4}}\, dx = 3\, \frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + \frac{1}{2}\, \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + \frac{x^{\frac{5}{4}+1}}{\frac{5}{4}+1} + C =$$

$$= \frac{9}{2}\sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x} + \frac{4}{9}\, x^2 \sqrt[4]{x} + C.$$

Ejemplo 3.

$$\int \frac{dx}{x+3} = \ln|x+3| + C.$$

Ejemplo 4.

$$\int \cos 7x\, dx = \frac{1}{7} \operatorname{sen} 7x + C.$$

Ejemplo 5.

$$\int \operatorname{sen}(2x-6)\, dx = -\frac{1}{2}\cos(2x-6) + C.$$

§ 4. INTEGRACION POR CAMBIO DE VARIABLE O POR SUSTITUCION

Supongamos que es preciso hallar la integral

$$\int f(x)\, dx,$$

pero, no podemos elegir inmediatamente la función primitiva para $f(x)$, aunque sabemos que ésta existe.

Realicemos el cambio de variable en el elemento de integración, haciendo

$$x = \varphi(t), \tag{1}$$

donde, $\varphi(t)$ es una función continua, lo mismo que su derivada, y tiene una función inversa. Entonces $dx = \varphi'(t)\, dt$; demostremos que en este caso se verifica la siguiente igualdad:

$$\int f(x)\, dx = \int f[\varphi(t)]\, \varphi'(t)\, dt. \tag{2}$$

Aquí se sobreentiende que la variable t será sustituida después de la integración del segundo miembro de la igualdad, por su expresión en función de x, en virtud de la igualdad (1).

Para determinar que las expresiones en los dos miembros son iguales, en el sentido indicado, es preciso demostrar que sus derivadas respecto a x son iguales. Hallemos la derivada del primer miembro:

$$\left(\int f(x)\, dx\right)'_x = f(x).$$

Derivemos el segundo miembro de la igualdad (2), respecto a x, como función compuesta en la que t es un argumento intermedio. La igualdad (1) expresa la dependencia que tiene t de x, siendo $\frac{dx}{dt} = \varphi'(t)$; según la regla de derivación de una función inversa:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\varphi'(t)}.$$

De tal manera tenemos:

$$\left(\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt\right)'_x = \left(\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt\right)'_t \frac{dt}{dx} =$$

$$= f[\varphi(t)]\varphi'(t)\frac{1}{\varphi'(t)} = f[\varphi(t)] = f(x).$$

Por consiguiente, las derivadas respecto a x de los dos miembros de la igualdad (2) son iguales, lo que se trataba de demostrar.

Hay *que elegir la función* $x = \varphi(t)$ *de modo que se pueda calcular la integral indefinida que figura en el segundo miembro de la igualdad* (2).

Observación. A veces es preferible elegir la sustitución de la variable en la forma $t = \psi(x)$ y no en $x = \varphi(t)$.

Ilustrémoslo con un ejemplo. Supongamos que es preciso calcular la integral

$$\int \frac{\psi'(x)\,dx}{\psi(x)}.$$

Es conveniente poner:

$$\psi(x) = t,$$

entonces:

$$\psi'(x)\,dx = dt,$$

$$\int \frac{\psi'(x)\,dx}{\psi(x)} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\psi(x)| + C.$$

Demos algunos ejemplos de integración por cambio de variables.

Ejemplo 1. $\int \sqrt{\operatorname{sen} x}\cos x\,dx = ?$ Hagamos la sustitución $t = \operatorname{sen} x$, entonces: $dt = \cos x\,dx$, y, por tanto,

$$\int \sqrt{\operatorname{sen} x}\cos x\,dx = \int \sqrt{t}\,dt = \int t^{1/2}\,dt = \frac{2t^{3/2}}{3} + C = \frac{2}{3}\operatorname{sen}^{3/2}x + C.$$

Ejemplo 2. $\int \frac{x\,dx}{1+x^2}=?$ Sea $t=1+x^2$, entonces $dt=2x\,dx$, y,

$$\int \frac{x\,dx}{1+x^2}=\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t}=\frac{1}{2}\ln t+C=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C.$$

Ejemplo 3. $\int \frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}$. Sea $t=\frac{x}{a}$, entonces: $dx=a\,dt$,

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a^2}\int \frac{a\,dt}{1+t^2}=\frac{1}{a}\int \frac{dt}{1+t^2}=\frac{1}{a}\ \operatorname{arctg} t+C=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C.$$

Ejemplo 4. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{1}{a}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}$. Sea $t=\frac{x}{a}$; entonces: $dx=a\,dt$,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{1}{a}\int \frac{a\,dt}{\sqrt{1-t^2}}=\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\operatorname{arcsen} t+C=\operatorname{arcsen}\frac{x}{a}+C.$$

(se supone que $a>0$).

En los ejemplos 3 y 4 hemos obtenido las fórmulas 11′ y 13′ de la tabla de integrales (véase § 2).

Ejemplo 5. $\int (\ln x)^3\frac{dx}{x}=?$. Sea $t=\ln x$; entonces $dt=\frac{dx}{x}$, $\int (\ln x)^3\frac{dx}{x}=$

$$=\int t^3\,dt=\frac{t^4}{4}+C=\frac{1}{4}(\ln x)^4+C.$$

Ejemplo 6. $\int \frac{x\,dx}{1+x^4}=?$. Sea $t=x^2$; entonces $dt=2x\,dx$,

$$\int \frac{x\,dx}{1+x^4}=\frac{1}{2}\int \frac{dt}{1+t^2}=\frac{1}{2}\ \operatorname{arctg} t+C=\frac{1}{2}\ \operatorname{arctg} x^2+C.$$

La integración por sustitución de variables es uno de los métodos más importantes del cálculo de las integrales indefinidas. Incluso cuando utilizamos algún otro método frecuentemente, estamos obligados a recurrir en las operaciones intermedias al método de sustitución de variables. El éxito de la integración depende en grado considerable de la habilidad para elegir la sustitución adecuada de variables. Esto simplifica la integral dada. Por eso, el estudio de los métodos de integración se reduce, en su esencia, a la determinación de la conveniente sustitución de variables para uno u otro elemento de integración. Al estudio de los métodos mencionados se dedica la mayor parte del capítulo presente.

§ 5. INTEGRALES DE CIERTAS FUNCIONES QUE CONTIENEN UN TRINOMIO CUADRADO

1. Calcular la integral

$$I_1=\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}.$$

Transformemos, previamente, en forma de una suma o una diferencia de los cuadrados el trinomio en el denominador,

$$ax^2+bx+c=a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right]=$$

$$=a\left[x^2+2\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right]=$$

$$=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)\right]=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\pm k^2\right],$$

donde está designado:

$$\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}=\pm k^2.$$

El signo «más» o «menos» se toma según sea positiva o negativa la expresión del primer miembro, es decir, según sean complejas o reales las raíces del trinomio ax^2+bx+c. De este modo, la integral I_1 toma la forma:

$$I_1=\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}=\frac{1}{a}\int\frac{dx}{\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\pm k^2\right]}.$$

Cambiemos la variable en la última integral:

$$x+\frac{b}{2a}=t,\quad dx=dt.$$

Obtenemos

$$I_1=\frac{1}{a}\int\frac{dt}{t^2\pm k^2}.$$

Estas son las integrales 11′ y 12 de la tabla.

Ejemplo 1. Calcular la integral

$$\int\frac{dx}{2x^2+8x+20}.$$

Solución.

$$I=\int\frac{dx}{2x^2+8x+20}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+4x+10}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+4x+4+10-4}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x+2)^2+6}.$$

Sustituimos la variable $x+2=t$, $dx=dt$, y, poniéndola en la expresión en consideración, obtenemos la integral de la tabla:

$$I=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+6}=\frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{6}}\ \operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{6}}+C.$$

Sustituyendo t por su expresión en función de x; en definitiva obtenemos:

$$I=\frac{1}{2\sqrt{6}}\ \operatorname{arctg}\frac{x+2}{\sqrt{6}}+C.$$

II. Calcular una integral de la forma más general

$$I_2=\int\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\,dx.$$

Transformemos el integrando en la forma siguiente:

$$I_2=\int\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\,dx=\int\frac{\frac{A}{2a}(2ax+b)+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)}{ax^2+bx+c}\,dx.$$

Respresentemos la última integral en forma de una suma de dos integrales. Sacando los factores constantes fuera del signo de la integral, obtenemos:

$$I_1=\frac{A}{2a}\int\frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}\,dx+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}.$$

La última es la integral I_1, que ya sabemos calcular. En la integral primera realicemos el cambio de variable:

$$ax^2+bx+c=t,\ (2ax+b)\,dx=dt.$$

Por consiguiente,

$$\int\frac{(2ax+b)\,dx}{ax^2+bx+c}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln|ax^2+bx+c|C.$$

En definitiva obtenemos:

$$I_2=\frac{A}{2a}\ln|ax^2+bx+c|+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)I_1.$$

Ejemplo 2. Calcular la integral

$$I=\int\frac{x+3}{x^2-2x-5}\,dx.$$

Apliquemos el procedimiento mencionado:

$$I=\int \frac{x+3}{x^2-2x-5}=\int \frac{\frac{1}{2}(2x-2)+\left(3+\frac{1}{2}2\right)}{x^2-2x-5}\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{(2x-2)\,dx}{x^2-2x-5}+4\int \frac{dx}{x^2-2x-5}=\frac{1}{2}\ln|x^2-2x-5|+$$

$$+4\int \frac{dx}{(x-1)^2-6}=\frac{1}{2}\ln|x^2-2x-5|+4\frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{6}-(x-1)}{\sqrt{6}+(x-1)}\right|+C.$$

III. Calcular la integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Utilizando las transformaciones estudiadas en el punto I, se puede reducir la integral (según sea el signo de a) a una de las integrales de la tabla:

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 \pm k^2}} \text{ para } a>0 \text{ ó } \int \frac{dt}{\sqrt{k^2-t^2}} \text{ para } a<0,$$

Estos dos integrales figuran en la tabla (véase las fórmulas 13′ y 14).

IV. La integral

$$\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$$

se calcula con ayuda de las siguientes transformaciones análogas a las estudiadas en el punto II:

$$\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx=\int \frac{\frac{A}{2a}(2ax+b)+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx=$$

$$=\frac{A}{2a}\int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Realizando en la primera integral la sustitución

$$ax^2+bx+c=t,\ (2ax+b)\,dx=dt,$$

obtenemos:

$$\int \frac{(2ax+b)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\int \frac{dt}{\sqrt{t}}=2\sqrt{t}+C=2\sqrt{ax^2+bx+c}+C.$$

La segunda integral ha sido examinada en el punto III del párrafo presente.

Ejemplo 3.

$$\int \frac{5x+3}{\sqrt{x^2+4x+10}}\,dx = \int \frac{\frac{5}{2}(2x+4)+(3-10)}{\sqrt{x^2+4x+10}}\,dx =$$
$$= \frac{5}{2}\int \frac{2x+4}{\sqrt{x^2+4x+10}}\,dx - 7\int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2+6}} =$$
$$= 5\sqrt{x^2+4x+10} - 7\ln\left|x+2+\sqrt{(x+2)^2+6}\right| + C =$$
$$= 5\sqrt{x^2+4x+10} - 7\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+10}\right| + C.$$

§ 6. INTEGRACION POR PARTES

Si u y v son dos funciones derivables de x, entonces como sabemos, la diferencial del producto uv es:

$$d\,(uv) = u\,dv + v\,du.$$

De aquí, integrando, obtenemos:

$$uv = \int u\,dv + \int v\,du$$

ó

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du \qquad (1)$$

Esta es *la fórmula de integración por partes*. Esta fórmula se usa frecuentemente para integrar las expresiones que pueden ser representadas en forma de un producto de dos factores, u y dv, de tal manera que la búsqueda de la función v, a partir de su diferencial dv, y el cálculo de la integral $\int v\,du$, constituyan en conjunto un problema más simple que el cálculo directo de la integral $\int u\,dv$.

Para descomponer el elemento de integración dado en dos factores u y dv se necesita cierta experiencia que se adquiere resolviendo problemas. Demos algunos ejemplos para demostrar el procedimiento en casos semejantes.

Ejemplo 1. $\int x \operatorname{sen} x\,dx = ?$ Sea:

$$u = x, \quad dv = \operatorname{sen} x\,dx$$

entonces,

$$du = dx, \quad v = -\cos x.$$

Por consiguiente, $\int x \operatorname{sen} x\,dx = -x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \operatorname{sen} x + C.$

Observación. Cuando determinamos la función v a partir de su diferencial dv, se puede tomar cualquiera constante arbitraria, puesto que ésta no figura en el resultado final (lo que es fácil verificar sustituyendo v en la igualdad (1) por la expresión $v + C$). Por eso es preferible elegir esta constante igual a cero.

El método de integración por partes se utiliza en muchos casos. Así, por ejemplo, las integrales del tipo

$$\int x^k \operatorname{sen} ax\, dx \qquad \int x^k \cos ax\, dx,$$
$$\int x^k e^{ax}\, dx, \qquad \int x^k \ln x\, dx,$$

como también otras que contienen funciones trigonométricas inversas, se calculan, usando la integración por partes.

Ejemplo 2. Hallar: $\int \operatorname{arctg} x\, dx$. Sea $u = \operatorname{arctg} x$, $dv = dx$, entonces: $du = \frac{dx}{1+x^2}$, $v = x$.

Por consiguiente,

$$\int \operatorname{arctg} x\, dx = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x\, dx}{1+x^2} = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln|1+x^2| + C.$$

Ejemplo 3. Hallar: $\int x^2 e^x\, dx$. Sea $u = x^2$, $dv = e^x\, dx$, entonces:

$$du = 2x\, dx, \; v = e^x$$

$$\int x^2 e^x\, dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x\, dx.$$

Integrando por partes la última integral,

$$u_1 = x, \qquad du_1 = dx,$$
$$dv_1 = e^x\, dx, \qquad v_1 = e^x.$$

Entonces:

$$\int x e^x\, dx = x e^x - \int e^x\, dx = x e^x - e^x + C.$$

En definitiva tenemos:

$$\int x^2 e^x\, dx = x^2 e^x - 2(x e^x - e^x) + C = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C = e^x (x^2 - 2x + 2) + C.$$

Ejemplo 4. Calcular: $\int (x^2 + 7x - 5) \cos 2x\, dx$. Haciendo $u = x^2 + 7x - 5$; $dv = \cos 2x\, dx$; entonces:

$$du = (2x+7)\, dx, \; v = \frac{\operatorname{sen} 2x}{2},$$

$$\int (x^2 + 7x - 5) \cos 2x\, dx = (x^2 + 7x - 5) \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} - \int (2x+7) \frac{\operatorname{sen} 2x}{2}\, dx.$$

Apliquemos el método de integración por partes a la última integral, teniendo en cuenta que $u_1 = \frac{2x+7}{2}$, $dv_1 = \operatorname{sen} 2x\, dx$; entonces:

$$du_1 = dx, \; v_1 = -\frac{\cos 2x}{2};$$

$$\int \frac{2x+7}{2} \operatorname{sen} 2x\, dx = \frac{2x+7}{2} \left(-\frac{\cos 2x}{2} \right) - \int \left(-\frac{\cos 2x}{2} \right) dx =$$
$$= -\frac{(2x+7) \cos 2x}{4} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + C.$$

De donde finalmente obtenemos:

$$\int (x^2+7x-5)\cos 2x\,dx = (x^2+7x-5)\frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + (2x+7)\frac{\cos 2x}{4} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + C.$$

Ejemplo 5. $I=\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx=?$

Efectuemos las transformaciones idénticas. Multipliquemos y dividamos el integrando por $\sqrt{a^2-x^2}$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \int \frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = a^2\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} - \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} =$$

$$= a^2 \operatorname{arsen}\frac{x}{a} - \int x\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Apliquemos a esta integral el método de integración por partes, poniendo

$$u=x, \qquad du=dx,$$

$$dv=\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}, \quad v=-\sqrt{a^2-x^2}.$$

Entonces:

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int x\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -x\sqrt{a^2-x^2} + \int \sqrt{a^2-x^2}\,dx.$$

Sustituyendo el último resultado en la expresión de la integral dada obtenida antes, tenemos:

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = a^2 \operatorname{arcsen}\frac{x}{a} + x\sqrt{a^2-x^2} - \int \sqrt{a^2-x^2}\,dx.$$

Traslademos la integral de la derecha a la izquierda, y llevando a cabo las transformaciones elementales, obtenemos en definitiva:

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{a^2}{2}\operatorname{arcsen}\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + C.$$

Ejemplo 6. Hallar las integrales

$$I_1=\int e^{ax}\cos bx\,dx \quad \text{y} \quad I_2=\int e^{ax}\operatorname{sen} bx\,dx.$$

Aplicando el método de integración por partes a la primera integral, obtenemos:

$$u=e^{ax}, \qquad du=ae^{ax},$$

$$dv=\cos bx\,dx, \quad v=\frac{1}{b}\operatorname{sen} bx,$$

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{1}{b}e^{ax}\operatorname{sen} bx - \frac{a}{b}\int e^{ax}\operatorname{sen} bx\,dx.$$

Apliquemos de nuevo a la última integral el método de integración por partes:

$$u=e^{ax}, \qquad du=ae^{ax},$$

$$dv=\operatorname{sen} bx\,dx, \quad v=-\frac{1}{b}\cos bx,$$

$$\int e^{ax}\operatorname{sen} bx\,dx = -\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx + \frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bx\,dx.$$

Introduciendo la expresión obtenida en la igualdad anterior, obtenemos:

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{1}{b}e^{ax}\operatorname{sen} bx + \frac{a}{b^2}e^{ax}\cos bx - \frac{a^2}{b^2}\int e^{ax}\cos bx\,dx.$$

De la última igualdad hallemos I_1:

$$\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)\int e^{ax}\cos bx\,dx = e^{ax}\left(\frac{1}{b}\operatorname{sen} bx + \frac{a}{b^2}\cos bx\right),$$

de donde

$$I_1 = \int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}(b\operatorname{sen} bx + a\cos bx)}{a^2+b^2}+C.$$

Del modo análogo hallamos:

$$I_2 = \int e^{ax}\operatorname{sen} bx\,dx = \frac{e^{ax}(a\operatorname{sen} bx - b\cos bx)}{a^2+b^2}+C.$$

§ 7. FRACCIONES RACIONALES. FRACCIONES RACIONALES ELEMENTALES Y SU INTEGRACION

Como veremos más abajo, no toda integral de una función elemental se resuelve mediante las funciones elementales. Por eso tiene gran importancia la definición de ciertas clases de funciones, cuyas integrales pueden ser expresadas mediante las funciones elementales. La más simple de estas clases es la clase de las funciones racionales.

Toda función racional puede ser representada en la forma de *una fracción racional, es decir, como la razón de dos polinomios*:

$$\frac{Q(x)}{f(x)} = \frac{B_0x^m + B_1x^{m-1} + \ldots + B_m}{A_0x^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_n}.$$

Sin limitar la generalidad del razonamiento, supongamos que estos polinomios no tienen raíces comunes.

Si el grado del *numerador* es *inferior* al del *denominador*, la fracción se llama *propia*; en el caso contrario, la fracción se llamará *impropia*.

Si la fracción es impropia, al dividir el numerador por el denominador (según la regla de división de los polinomios) se puede representar la fracción dada como la suma de un polinomio y de una fracción propia:

$$\frac{Q(x)}{f(x)} = M(x) + \frac{F(x)}{f(x)},$$

donde, $M(x)$ es un polinomio, y $\frac{F(x)}{f(x)}$ es una fracción propia.

Ejemplo 1. Sea $\frac{x^4-3}{x^2+2x+1}$ una fracción racional impropia.

Al dividir el numerador por el denominador (según la regla de división de los polinomios), obtenemos:

$$\frac{x^4-3}{x^2+2x+1}=x^2-2x+3-\frac{4x-6}{x^2+2x+1}.$$

La integración de los polinomios no ofrece dificultades. Por eso, la dificultad fundamental de la integración de fracciones racionales consiste en la integración de las fracciones racionales propias.

Definición: Las fracciones racionales propias del tipo:

I. $\frac{A}{x-a}$,

II. $\frac{A}{(x-a)^k}$ (k es un número entero positivo $\geqslant 2$).

III. $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$ (las raíces del denominador son complejas, es decir, $\frac{p^2}{4}-q<0$),

IV. $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$ (k es un número entero positivo $\geqslant 2$, las raíces del denominador son complejas).

se llaman *fracciones simples del tipo I, II, III, IV*, respectivamente.

En el § 8 demostraremos que cada fracción racional puede ser representada en forma de una suma de fracciones simples. Por eso, estudiemos al principio las integrales de las fracciones simples.

La integración de las fracciones simples del tipo I, II, III no ofrece grandes dificultades, por eso efectuaremos su integración sin dar explicaciones detalladas.

I. $$\int\frac{A}{x-a}\,dx=A\ln|x-a|+C.$$

II. $$\int\frac{A}{(x-a)^k}\,dx=A\int(x-a)^{-k}\,dx=$$

$$=A\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1}+C=\frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}}+C.$$

III. $$\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,dx=\int\frac{\frac{A}{2}(2x+p)+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)}{x^2+px+q}\,dx=$$

$$=\frac{A}{2}\int\frac{2x+p}{x^2+px+q}\,dx+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{dx}{x^2+px+q}=$$

$$= \frac{A}{2}\ln|x^2+px+q| + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)} =$$

$$= \frac{A}{2}\ln|x^2+px+q| + \frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C \text{ (véase § 5).}$$

La integración de las fracciones simples del tipo IV requiere cálculos más complicados. Supongamos que debemos calcular una integral de este tipo.

IV. $\displaystyle\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}\,dx.$

Hagamos las transformaciones:

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}\,dx = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p)+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)}{(x^2+px+q)^k}\,dx =$$

$$= \frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k}\,dx + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k}.$$

La primera integral se halla por sustitución $x^2+px+q=t$; $(2x+p)\,dx=dt$:

$$\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k}\,dx = \int \frac{dt}{t^k} = \int t^{-k}\,dt = \frac{t^{-k+1}}{1-k} + C =$$

$$= \frac{1}{(1-k)(x^2+px+q)^{k-1}} + C.$$

Escribamos la segunda integral designada por I_k, en la forma:

$$I_k = \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k} = \int \frac{dx}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right]^k} =$$

$$= \int \frac{dt}{(t^2+m^2)^k},$$

haciendo

$$x+\frac{p}{2}=t, \quad dx=dt, \quad q-\frac{p^2}{4}=m^2.$$

(según la hipótesis, las raíces del denominador son complejas y, por tanto, $q-\frac{p^2}{4}>0$). Ahora procedamos del modo siguiente:

$$I_k=\int\frac{dt}{(t^2+m^2)^k}=\frac{1}{m^2}\int\frac{(t^2+m^2)-t^2}{(t^2+m^2)^k}dt=$$

$$=\frac{1}{m^2}\int\frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}}-\frac{1}{m^2}\int\frac{t^2}{(t^2+m^2)^k}dt.$$

Transformemos la última integral:

$$\int\frac{t^2\,dt}{(t^2+m^2)^k}=\int\frac{t\cdot t\,dt}{(t^2+m^2)^k}=$$

$$=\frac{1}{2}\int t\frac{d(t^2+m^2)}{(t^2+m^2)^k}=-\frac{1}{2(k-1)}\int td\left(\frac{1}{(t^2+m^2)^{k-1}}\right).$$

Integrando por partes, tenemos:

$$\int\frac{t^2\,dt}{(t^2+m^2)^k}=-\frac{1}{2(k-1)}\left[t\frac{1}{(t^2+m^2)^{k-1}}-\int\frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}}\right].$$

Sustituyendo esta expresión en la igualdad (1), obtenemos:

$$I_k=\int\frac{dt}{(t^2+m^2)^k}=\frac{1}{m^2}\int\frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}}+$$

$$+\frac{1}{m^2}\frac{1}{2(k-1)}\left[\frac{t}{(t^2+m^2)^{k-1}}-\int\frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}}\right]=$$

$$=\frac{t}{2m^2(k-1)(t^2+m^2)^{k-1}}+\frac{2k-3}{2m^2(k-1)}\int\frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}}.$$

En el segundo miembro se encuentra la integral del mismo tipo que I_k, siendo el exponente del grado del denominador del integrando menor en una unidad $(k-1)$; así resulta que hemos expresado I_k en función de I_{k-1}.

Aplicando sucesivamente este procedimiento obtenemos la integral conocida:

$$I_1=\int\frac{dt}{t^2+m^2}=\frac{1}{m}\operatorname{arctg}\frac{t}{m}+C.$$

Sustituyendo ahora t y m por sus valores, obtenemos la expresión de la integral IV, en función de x y números dados A, B, p, q.

Ejemplo 2.

$$\int \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2}\,dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x+2)+(-1-1)}{(x^2+2x+3)^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{(x^2+2x+3)^2}\,dx - 2\int \frac{dx}{(x^2+2x+3)^2} =$$

$$= -\frac{1}{2}\,\frac{1}{(x^2+2x+3)} - 2\int \frac{dx}{(x^2+2x+3)^2}.$$

Apliquemos a la última integral la sustitución $x+1=t$:

$$\int \frac{dx}{(x^2+2x+3)^2} = \int \frac{dx}{[(x+1)^2+2]^2} = \int \frac{dt}{(t^2+2)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{(t^2+2)-t^2}{(t^2+2)^2}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+2} - \frac{1}{2}\int \frac{t^2}{(t^2+2)^2}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\,\operatorname{arctg}\,\frac{t}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\int \frac{t^2\,dt}{(t^2+2)^2}.$$

Examinemos la última integral:

$$\int \frac{t^2\,dt}{(t^2+2)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{t\,d(t^2+2)}{(t^2+2)^2} = -\frac{1}{2}\int t\,d\left(\frac{1}{t^2+2}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\,\frac{t}{t^2+2} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+2} = -\frac{t}{2(t^2+2)} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\,\operatorname{arctg}\,\frac{t}{\sqrt{2}}.$$

aquí todavía no ponemos una constante arbitraria, la escribiremos en el resultado final).

Por tanto,

$$\int \frac{dx}{(x^2+2x+3)^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\left[-\frac{x+1}{2(x^2+2x+3)} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right].$$

En definitiva tenemos:

$$\int \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2}\,dx = -\frac{x+2}{2(x^2+2x+3)} - \frac{\sqrt{2}}{4}\,\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}} + C.$$

§ 8. DESCOMPOSICION DE LA FRACCION RACIONAL EN FRACCIONES SIMPLES

Demostremos ahora que toda fracción racional propia puede ser descompuesta en la suma de fracciones simples.

Sea $\frac{F(x)}{f(x)}$ una fracción racional propia.

Supongamos que los coeficientes de los polinomios que la integran son números reales y la fracción dada es irreducible (lo último significa que el numerador y el denominador no tienen raíces comunes).

Teorema 1. *Sea $x = a$ una raíz múltiple de orden k del denominador, es decir, $f(x) = (x-a)^k f_1(x)$, donde $f_1(a) \neq 0$* (véase § 6, cap. VII). *Entonces la fracción propia dada $\frac{F(x)}{f(x)}$ se puede descomponer en la suma de dos fracciones propias:*

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{F_1(x)}{(x-a)^{k-1} f_1(x)}, \tag{1}$$

donde A es una constante, diferente de cero, y $F_1(x)$ es un polinomio de grado inferior al grado del denominador $(x-a)^{k-1} f_1(x)$.

Demostración. Escribamos la identidad

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{F(x) - Af_1(x)}{(x-a)^k f_1(x)} \tag{2}$$

(que se verifica para cualquier A) y definamos la constante A de modo que el polinomio $F(x) - Af_1(x)$ sea divisible por $x - a$. En virtud del teorema de Bezout, es necesario y suficiente que se verifique la igualdad

$$F(a) - Af_1(a) = 0.$$

Puesto que $f_1(a) \neq 0$, $F(a) \neq 0$, se puede definir A de una manera unívoca por la igualdad

$$A = \frac{F(a)}{f_1(a)}.$$

Para tal A tenemos:

$$F(x) - Af_1(x) = (x-a) F_1(x),$$

donde $F_1(x)$ es un polinomio de grado inferior al del polinomio $(x-a)^{k-1} f_1(x)$. Reduciendo la fracción en la fórmula (2) por $(x-a)$, obtenemos la igualdad (1).

Corolario. A la fracción racional propia

$$\frac{F_1(x)}{(x-a)^{k-1} f_1(x)}$$

que entra en la igualdad (1), se pueden aplicar razonamientos análogos. Así, si el denominador tiene una raíz múltiple $x = a$ de orden k, se puede escribir:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{A_1}{(x-a)^{k-1}} + \ldots + \frac{A_{k-1}}{x-a} + \frac{F_k(x)}{f_1(x)},$$

donde $\frac{F_k(x)}{f_1(x)}$ es una fracción propia irreducible a la cual se puede aplicar el teorema recién demostrado, si $f_1(x)$ tiene otras raíces reales.

Estudiemos ahora el caso en que el denominador tiene raíces complejas. Recordemos que las raíces complejas del polinomio de coeficientes reales están conjugadas en pares (véase § 8 cap. VII).

En la descomposición del polinomio en factores reales, a cada par de raíces conjugadas corresponde una expresión de la forma $x^2 + px + q$. Si las raíces conjugadas son múltiples de orden μ la expresión correspondiente será $(x^2 + px + q)^\mu$.

Teorema 2. *Si* $f(x) = (x^2 + px + q)^\mu \varphi_1(x)$, *donde el polinomio* $\varphi_1(x)$ *no es divisible por* $x^2 + px + q$, *la fracción racional propia* $\frac{F(x)}{f(x)}$ *puede ser representada por la suma de dos fracciones propias:*

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^\mu} + \frac{\Phi_1(x)}{(x^2+px+q)^{\mu-1}\varphi_1(x)} \tag{3}$$

donde $\Phi_1(x)$ *es un polinomio de grado inferior al del polinomio* $(x^2 + px + q)^{\mu-1} \varphi_1(x)$.

Demostración: Escribamos la identidad

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{F(x)}{(x^2+px+q)^\mu \varphi_1(x)} = \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^\mu} + \frac{F(x)-(Mx+N)\varphi_1(x)}{(x^2+px+q)^\mu \varphi_1(x)}, \tag{4}$$

que se verifica para todo M y N y definamos M y N de modo que el polinomio $F(x) - (Mx + N)\varphi_1(x)$ se divida por $x^2 + px + q$. Para esto es necesario y suficiente que la ecuación

$$F(x) - (Mx + N)\varphi_1(x) = 0$$

tenga las mismas raíces $\alpha \pm i\beta$ que el polinomio
$$x^2 + px + q.$$

Por tanto,

$$F(\alpha + i\beta) - [M(\alpha + i\beta) + N]\varphi_1(\alpha + i\beta) = 0$$

ó

$$M(\alpha + i\beta) + N = \frac{F(\alpha + i\beta)}{\varphi_1(\alpha + i\beta)}.$$

Pero, $\frac{F(\alpha+i\beta)}{\varphi_1(\alpha+i\beta)}$ es un número complejo determinado que se puede escribir en la forma $K + iL$; donde K y L son números reales. Así,

$$M(\alpha + i\beta) + N = K + iL;$$

de donde $M\alpha + N = K$, $M\beta = L$
ó

$$M = \frac{L}{\beta}, \qquad N = \frac{K\beta - L\alpha}{\beta}.$$

Siendo estos los valores de los coeficientes M y N, el polinomio $F(x) - (Mx + N)\,\varphi_1(x)$ tiene el número $\alpha + i\beta$ por raíz, y, por tanto, la raíz conjugada $\alpha - i\beta$. Pero, en este caso, el polinomio es divisible sin resto por las diferencias $x - (\alpha + i\beta)$ y $x - (\alpha - i\beta)$, y, lógicamente, por su producto, es decir, por $x^2 + px + q$.

Designando el cociente de esta división por $\Phi_1(x)$, obtenemos:

$$F(x) - (Mx + N)\,\varphi_1(x) = (x^2 + px + q)\,\Phi_1(x).$$

Simplificando por $x^2 + px + q$ la última fracción en la igualdad (4), obtenemos la igualdad (3), quedándose claro que $\Phi_1(x)$ es un polinomio de grado inferior al del denominador, lo que se trataba de demostrar.

Aplicando los resultados de los teoremas 1 y 2 a la fracción propia $\frac{F(x)}{f(x)}$, podemos destacar sucesivamente todas las fracciones simples, correspondientes a todas las raíces del denominador $f(x)$. Así, de lo anterior se deduce el siguiente resultado:

Si $f(x) = (x-a)^\alpha (x-b)^\beta \ldots (x^2+px+q)^\mu \ldots (x^2+lx+s)^\nu$, *la fracción* $\frac{F(x)}{f(x)}$ *puede ser descompuesta de la manera siguiente:*

$$\left.\begin{aligned}
\frac{F(x)}{f(x)} = {} & \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{A_{\alpha-1}}{x-a} + \\
& + \frac{B}{(x-b)^\beta} + \frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}} + \ldots + \frac{B_{\beta-1}}{x-b} + \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^\mu} + \frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^{\mu-1}} + \ldots + \frac{M_{\mu-1}x+N_{\mu-1}}{x^2+px+q} + \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \frac{Px+Q}{(x^2+lx+s)^\nu} + \frac{P_1x+Q_1}{(x^2+lx+s)^{\nu-1}} + \ldots + \frac{P_{\nu-1}x+Q_{\nu-1}}{x^2+lx+s}.
\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Se puede determinar los coeficientes $A, A_1, \ldots, B, B_1, \ldots$ teniendo en cuenta las consideraciones siguientes. La igualdad (5) es una identidad, por consiguiente, al reducir estas fracciones a un común denominador obtenemos en los numeradores del primero y segundo miembros polinomios idénticos. Igualando los coeficientes de los términos que tienen las mismas potencias de x, obtenemos un sistema de ecuaciones para determinar los coeficientes incógnitos $A, A_1, \ldots, B, B_1, \ldots$

También podemos determinar estos coeficientes, teniendo en cuenta la observación siguiente: los polinomios obtenidos en ambos miembros de la igualdad, después de la reducción de las fracciones al común denominador, deben ser idénticamente iguales; por consiguiente, los valores de estos polinomios son iguales para cada valor particular de x. Dando a x valores particulares, obtenemos las ecuaciones necesarias para la determinación de los coeficientes.

De este modo demostramos que toda fracción racional propia puede ser representada en la forma de una suma de las fracciones racionales simples.

Ejemplo. Descomponer la fracción $\frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}$ en fracciones simples.
En virtud de la fórmula (5) tenemos:

$$\frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}=\frac{A}{(x+1)^3}+\frac{A_1}{(x+1)^2}+\frac{A_2}{x+1}+\frac{B}{x-2}.$$

Reduciendo a un común denominador e igualando los numeradores obtenemos:

$$x^2+2=A(x-2)+A_1(x+1)(x-2)+A_2(x+1)^2(x-2)+B(x+1)^3, \quad (6)$$

ó

$$x^2+2=(A_2+B)x^3+(A_1+3B)x^2+(A-A_1-3A_2+3B)x+$$
$$+(-2A-2A_1-2A_2+B).$$

Igualando los coeficientes de x^3, x^2, x^1, x^0 (término absoluto), obtenemos un sistema de ecuaciones para determinar los coeficientes:

$$0=A_2+B,$$
$$1=A_1+3B,$$
$$0=A-A_1-3A_2+3B,$$
$$2=-2A-2A_1-2A_2+B.$$

Resolviendo este sistema, tenemos:

$$A=-1; \quad A_1=\frac{1}{3}; \quad A_2=-\frac{2}{9}; \quad B=\frac{2}{9}.$$

Se puede, también, determinar algunos coeficientes a partir de las ecuaciones que se obtienen de la igualdad (6), que es identidad respecto a x, cuando a la variable x se dan ciertos valores particulares.

Pues, haciendo $x=-1$, tenemos $3=-3A$ ó $A=-1$;

haciendo $x=2$, tenemos $6=27B$; $B=\frac{2}{9}$.

Si adjuntamos a estas dos ecuaciones otras dos obtenidas mediante la igualación de los coeficientes de las mismas potencias de x, obtenemos cuatro ecuaciones para determinar cuatro coeficientes desconocidos.

En definitiva, tenemos una descomposición:

$$\frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}=-\frac{1}{(x+1)^3}+\frac{1}{3(x+1)^2}-\frac{2}{9(x+1)}+\frac{2}{9(x-2)}.$$

§ 9. INTEGRACION DE LAS FRACCIONES RACIONALES

Supongamos que hace falta calcular la integral de la fracción racional $\frac{Q(x)}{f(x)}$, es decir, la integral

$$\int \frac{Q(x)}{f(x)}\,dx.$$

Si la fracción dada es **impropia**, la representamos como suma de un polinomio $M(x)$ y una fracción racional **propia** $\frac{F(x)}{f(x)}$ (véase 7). Pero fracción $\frac{F(x)}{f(x)}$ la representamos en la forma de una suma de fracciones **simples** (según la fórmula (5) § 8). De tal modo, la integración de toda la fracción racional consiste fundamentalmente en la integración de un polinomio y de varias fracciones **simples**. De los resultados obtenidos en el § 8 se deduce que las raíces del denominador $f(x)$ determinan la forma de las fracciones simples. Son posibles los siguientes casos:

Caso I. *Las raíces del denominador son reales y diferentes, es decir,*

$$f(x)=(x-a)(x-b)\ldots(x-d).$$

En este caso la fracción $\frac{F(x)}{f(x)}$ se descompone en las fracciones simples del tipo I:

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\ldots+\frac{D}{x-d},$$

y luego

$$\int \frac{F(x)}{f(x)}\,dx=\int \frac{A}{x-a}\,dx+\int \frac{B}{x-b}\,dx+\ldots+\int \frac{D}{x-d}\,dx=$$

$$=A\ln|x-a|+B\ln|x-b|+\ldots+D\ln|x-d|+C.$$

Caso II. *Las raíces del denominador son reales; pero, algunas raíces son múltiples:*

$$f(x)=(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}\ldots(x-d)^{\delta}.$$

En este caso la fracción $\frac{F(x)}{f(x)}$ se descompone en fracciones simples del tipo I y II.

Ejemplo 1. (véase el ejemplo en el § 8 cap. X).

$$\int \frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}\,dx = -\int \frac{dx}{(x+1)^3} + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{(x+1)^2} - \frac{2}{9}\int \frac{dx}{x+1} +$$

$$+\frac{2}{9}\int \frac{dx}{x-2} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{3(x+1)} - \frac{2}{9}\ln|x+1| +$$

$$+\frac{2}{9}\ln|x-2| + C = -\frac{2x-1}{-6(x+1)^2} + \frac{2}{9}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right| + C.$$

Caso III. *El denominador tiene raíces complejas simples*, es decir, *diferentes*:

$$f(x) = (x^2+px+q)(x^2+lx+s)\ \ldots\ (x-a)^{\alpha}\ \ldots\ (x-d)^{\delta}.$$

En este caso la fracción $\frac{F(x)}{f(x)}$ se descompone en fracciones simples de los tipos I, II y III.

Ejemplo 2. Calcular la integral

$$\int \frac{x\,dx}{(x^2+1)(x-1)}.$$

Descomponemos la fracción bajo el signo de integral en fracciones simples (véase (5) § 8, cap. X):

$$\frac{x}{(x_2+1)(x-1)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x-1}.$$

Por consiguiente,

$$x = (Ax+B)(x-1) + C(x^2+1).$$

Haciendo $x=1$, tenemos: $1=2C$, $C=\frac{1}{2}$.

Haciendo $x=0$, tenemos: $0=-B+C$, $B=\frac{1}{2}$.

Igualando los coeficientes de x^2, obtenemos $0=A+C$, de donde $A=-\frac{1}{2}$.

Así,

$$\int \frac{x\,dx}{(x^2+1)(x-1)} = -\frac{1}{2}\int \frac{x-1}{x^2+1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{x\,dx}{x^2+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} =$$

$$= -\frac{1}{4}\ln|x^2+1| + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\ln|x-1| + C.$$

Caso IV. El *denominador contiene también raíces complejas múltiples*:

$$f(x) = (x^2 + px + q)^\mu (x^2 + lx + s)^\nu \ldots (x-a)^\alpha \ldots (x-d)^\delta.$$

En este caso las fracciones simples del tipo IV entran también en la descomposición de la fracción $\frac{F(x)}{f(x)}$.

Ejemplo 3. Calcular la integral

$$\int \frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2(x+1)}\,dx.$$

Solución. Descompongamos la fracción en elementos simples:

$$\frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2(x+1)} = \frac{Ax+B}{(x^2+2x+3)^2} + \frac{Cx+D}{(x^2+2x+3)} + \frac{E}{x+1},$$

de donde

$$x^4+4x^3+11x^2+12x+8 =$$
$$= (Ax+B)(x+1) + (Cx+D)(x^2+2x+3)(x+1) + E(x^2+2x+3)^2.$$

Combinando los dos métodos dados para determinar los coeficientes, hallamos:

$$A=1, \quad B=-1, \quad C=0, \quad D=0, \quad E=1.$$

De tal modo tenemos:

$$\int \frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2(x+1)}\,dx = \int \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2}\,dx + \int \frac{dx}{x+1} =$$
$$= -\frac{x+2}{2(x^2+2x+3)} - \frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}} + \ln|x+1| + C$$

En el ejemplo 2, § 7, cap. X hemos calculado la primera integral del segundo miembro. La segunda integral puede ser calculada directamente.

Del estudio realizado se deduce que la integral de cualquier función racional puede ser expresada mediante funciones elementales finitas, es decir:

1) mediante los logaritmos, si las fracciones simples son del tipo I;

2) mediante las funciones racionales, si las fracciones simples son del tipo II;

3) mediante los logaritmos y arcos tangentes, si las fracciones simples son del tipo III;

4) mediante las funciones racionales y arcos tangentes, si las fracciones simples son del tipo IV.

§ 10. METODO DE OSTROGRADSKI

Para calcular la integral de una función racional, cuando el denominador tiene las raíces **múltiples**, se puede utilizar otro método más simple. Este método permite destacar la **parte racional** de la integral, sin descomponer la fracción en los elementos simples e integrar después la fracción racional, cuyo denominador tiene solamente raíces **simples**. La integración de tal fracción no ofrece ninguna dificultad, puesto que puede ser descompuesta en fracciones simples de los tipos I y III. Este método se debe al célebre matemático ruso M. V. Ostrogradski (1801—1862) y se basa en lo siguiente.

Supongamos que se necesita integrar una fracción racional propia $\frac{F(x)}{f(x)}$, donde

$$f(x) = (x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta} \ldots (x^2+px+q)^{\mu}.$$

En virtud de la igualdad (5) (§ 8) el caso se reduce a la integración de las fracciones racionales propias de cuatro tipos (véase § 7).

En este caso:

1) La integral de la fracción del tipo $\frac{A}{(x-a)^{\alpha}}$ es una fracción del tipo $\frac{A^*}{(x-a)^{\alpha-1}}$.

2) La integral de la fracción $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^{\mu}}$ es una suma de fracciones del tipo $\frac{M^*x+N^*}{(x^2+px+q)^{\mu^*}}$, donde $\mu^* \leqslant \mu - 1$, y de una integral del tipo

$$\int \frac{N^{**}}{x^2+px+q}\,dx.$$

Por ahora dejemos aparte la integración de las fracciones de los tipos I y III.

Al sumar las fracciones racionales obtenidas después de la integración de las fracciones del tipo II y IV, tenemos la fracción propia del tipo $\frac{Y(x)}{Q(x)}$, en la que el polinomio $Q(x)$ es igual a

$$Q(x) = (x-a)^{\alpha-1}(x-b)^{\beta-1} \dots (x^2+px+q)^{\mu-1} \dots$$
$$\dots (x^2+lx+s)^{\nu-1}.$$

$Y(x)$ es un polinomio cuyo grado es menor, en una unidad, que el del polinomio Q.

Al sumar las integrales de todas las fracciones del tipo I y III, (incluyendo también las integrales del tipo

$$\int \frac{N^{**}}{x^2+px+q}\,dx,$$

obtenidas mediante la integración de las fracciones del tipo IV) obtenemos la integral de la fracción propia del tipo $\frac{X(x)}{P(x)}$, donde el polinomio $P(x)$ es igual a

$$P(x) = (x-a)(x-b) \dots (x^2+px+q) \dots (x^2+lx+s).$$

Así, encontremos que

$$\int \frac{F(x)}{f(x)} = \frac{Y(x)}{Q(x)} + \int \frac{X(x)}{P(x)}\,dx. \qquad (1)$$

Aquí, $X(x)$ es un polinomio cuyo grado es menor en una unidad que el del polinomio $P(x)$.

Determinemos ahora los polinomios $X(x)$ y $Y(x)$ de los numeradores. Para esto derivemos ambos miembros de la igualdad (1):

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{QY' - Q'Y}{Q^2} + \frac{X}{P}$$

ó

$$F(x) = \frac{f(x)\,Y'}{Q} - \frac{f(x)\,Q'Y}{Q^2} + \frac{f(x)\,X}{P}. \qquad (2)$$

Demostremos que la expresión del segundo miembro es un polinomio. Notemos que $f(x) = PQ$ y escribamos la igualdad (2) en la forma:

$$F(x) = PY' - \frac{PQ'Y}{Q} + QX. \qquad (2')$$

Queda demostrar que la expresión $-\frac{PQ'Y}{Q}$ es un polinomio, o que PQ' es divisible por Q. Para esto observemos que

$$\frac{Q'}{Q}=[\ln Q]'=[(\alpha-1)\ln(x-a)+(\beta-1)\ln(x-b)+\ldots$$
$$\ldots+(\mu-1)\ln(x^2+px+q)+\ldots+(\nu-1)\ln(x^2+lx+s)]'=$$
$$=\frac{\alpha-1}{x-a}+\frac{\beta-1}{x-b}+\ldots+\frac{(\mu-1)(2x+p)}{x^2+px+q}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{(\nu-1)(2x+l)}{x^2+lx+s}.$$

El polinomio P será el denominador común de las fracciones del segundo miembro. El numerador será un polinomio del grado inferior al del de P. Designémoslo por T. De tal modo,

$$\frac{Q'}{Q}=\frac{T}{P}.$$

Por consiguiente, la expresión

$$P\frac{Q'}{Q}Y=P\frac{T}{P}Y=TY$$

es un polinomio. La igualdad (2') tomará la forma:

$$F(x)=PY'-TY+QX. \tag{3}$$

Comparando los coeficientes de iguales potencias de la variable en la igualdad (3), obtenemos el sistema de ecuaciones, de donde encontramos los coeficientes desconocidos de los polinomios X y Y.

Ejemplo. Calcular

$$\int\frac{1}{(x^3-1)^2}\,dx.$$

Solución. *En este caso:*

$$f(x)=(x-1)^2(x^2+x+1)^2,$$
$$P(x)=(x-1)(x^2+x+1)=x^3-1,$$
$$Q(x)=\qquad\qquad\qquad=x^3-1.$$

La igualdad (1) tiene la forma:

$$\int\frac{dx}{(x^3-1)^2}=\frac{Ax^2+Bx+C}{x^3-1}+\int\frac{Ex^2+Fx+G}{x^3-1}\,dx. \tag{4}$$

Derivando ambos miembros de la igualdad (4) tenemos:

$$\frac{1}{(x^3-1)^2}=\frac{(x^3-1)(2Ax+B)-(Ax^2+Bx+c)\,3x^2}{(x^3-1)^2}+\frac{Ex^2+Fx+G}{x^3-1}.$$

Eliminando el denominador, obtenemos:

$$1=(x^3-1)(2Ax+B)-(Ax^2+Bx+C)\,3x^2+(x^3-1)(Ex^2+Fx+G).$$

Igualando los coeficientes de los términos con las mismas potencias de x en ambos miembros de la igualdad, obtenemos un sistema de seis ecuaciones para determinar los coeficientes A, B, C, E, F, G:

$$\begin{aligned}0&=E,\\0&=-A+F,\\0&=-2B+G,\\0&=3C-E,\\0&=-2A-F,\\1&=-B-G.\end{aligned}$$

La solución de este sistema nos da:

$$E=0,\ A=0,\ C=0,\ B=-\frac{1}{3},\ F=0,\ G=-\frac{2}{3}.$$

Sustituyendo los valores de los coeficientes determinados en la igualdad (4), obtenemos:

$$\int\frac{dx}{(x^3-1)^2}=\frac{-\frac{1}{3}x}{x^3-1}+\int\frac{-\frac{2}{3}}{x^3-1}\,dx.$$

El denominador de la última integral tiene sólo raíces simples y, por eso, la integral se calcula fácilmente. En definitiva:

$$\int\frac{dx}{(x^3-1)^2}=\frac{-x}{3(x^3-1)}+\int\left[\frac{-\frac{2}{9}}{x-1}+\frac{\frac{2}{9}x+\frac{4}{9}}{x^2+x+1}\right]dx=$$

$$=-\frac{x}{3(x^2-1)}-\frac{2}{9}\ln|x-1|+\frac{1}{9}\ln(x^2+x+1)+\frac{2\sqrt{3}}{9}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

§ 11. INTEGRALES DE LAS FUNCIONES IRRACIONALES

No siempre es posible expresar la integral de función irracional mediante funciones elementales. En este párrafo y en los posteriores estudiaremos funciones irracionales, cuyas integrales se reducen, mediante sustituciones de las variables correspondientes, a las integrales de funciones racionales y se integran, por tanto, totalmente.

1. Examinemos la integral $\int R\left(x,\ x^{\frac{m}{n}},\ \ldots,\ x^{\frac{r}{s}}\right)dx$, donde R es una función racional de sus argumentos*.

---

*) El símbolo $R\left(x,\ x^{\frac{m}{n}},\ \ldots,\ x^{\frac{r}{s}}\right)$ indica que con las magnitudes x, $x^{\frac{m}{n}}$, ..., $x^{\frac{r}{s}}$ se ejecutan sólo operaciones racionales.

Del mismo modo hay que entender en lo ulterior los símbolos del tipo $R\left(x,\ \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}},\ \ldots\right)$, $R\left(x,\ \sqrt{ax^2+bx+c}\right)$, $R(\operatorname{sen}x,\ \cos x)$, etc. Así por ejemplo, el símbolo $R(\operatorname{sen}x,\ \cos x)$ indica que con $\operatorname{sen}x$ y $\cos x$ se realizan operaciones racionales.

Sea k el común denominador de las fracciones $\frac{m}{n}, \ldots, \frac{r}{s}$. Ejecutemos la sustitución:

$$x = t^k, \qquad dx = kt^{k-1}\,dt.$$

Entonces, cada potencia **fraccionaria** de x se puede expresar *mediante una potencia* **entera** *de t y, por consiguiente, el* **integrando** se transformará en **función racional** de t.

Ejemplo 1. Calcular la integral

$$\int \frac{x^{\frac{1}{2}}\,dx}{x^{\frac{3}{4}}+1}.$$

Solución. El común denominador de las fracciones $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4}$ es 4. Por eso, efectuemos la sustitución $x = t^4$, $dx = 4t^3\,dt$; entonces:

$$\int \frac{x^{\frac{1}{2}}\,dx}{x^{\frac{3}{4}}+1} = 4\int \frac{t^2}{t^3+1}\,t^3\,dt = 4\int \frac{t^5}{t^3+1}\,dt = 4\int \left(t^2 - \frac{t^2}{t^3+1}\right)dt =$$

$$= 4\int t^2\,dt - 4\int \frac{t^2}{t^3+1}\,dt = 4\frac{t^3}{3} - \frac{4}{3}\ln|t^3+1| + C =$$

$$= \frac{4}{3}\left[x^{\frac{3}{4}} - \ln\left|x^{\frac{3}{4}}+1\right|\right] + C.$$

II. Examinemos la integral del tipo

$$\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right]dx.$$

La integral se reduce a la de una función racional por medio de la sustitución

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^k,$$

donde, k es un denominador común de las fracciones $\frac{m}{n}, \ldots, \frac{r}{s}$.

Ejemplo 2. Calcular la integral

$$\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}\,dx.$$

Solución. Efectuemos la sustitución

$$x+4 = t^2;\; x = t^2-4;$$

$dx = 2t\,dt$; entonces:

$$\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}\,dx = 2\int \frac{t^2}{t^2-4}\,dt = 2\int \left(1+\frac{4}{t^2-4}\right)dt = 2\int dt + 8\int \frac{dt}{t^2-4} =$$

$$= 2t + 2\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right| + C = 2\sqrt{x+4} + 2\ln\left|\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+4}+2}\right| + C.$$

§ 12. INTEGRALES DEL TIPO $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$

Examinemos la integral

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx. \tag{1}$$

Esta integral se reduce a la de una función racional de la nueva variable mediante las siguientes sustituciones de Euler.

1. *Primera sustitución de Euler.* Si $a > 0$, hacemos:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} \doteq \pm\sqrt{a}\,x + t.$$

Para mayor precisión, tomemos el signo más delante de $\sqrt{a}$. Entonces,

$$ax^2+bx+c = ax^2 + 2\sqrt{a}\,xt + t^2,$$

de donde x se define como una función racional de t:

$$x = \frac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}\,t}$$

(lo que quiere decir que dx también es una función racional de t), por consiguiente:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}\,x + t = \sqrt{a}\,\frac{t^2-c}{b-2t\sqrt{a}} + t$$

es decir, $\sqrt{ax^2+bx+c}$ es función racional de t.

Puesto que $\sqrt{ax^2+bx+c}$, x y dx se expresan mediante funciones racionales de t, por tanto, la integral dada (1) se transforma en la integral de una función racional de t.

Ejemplo 1. Calcular la integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+C}}.$$

Solución. Puesto que aquí $a = 1 > 0$, pongamos $\sqrt{x^2+C} = -x+t$; entonces:

$$x^2 + C = x^2 - 2xt + t^2,$$

de donde

$$x = \frac{t^2-C}{2t}.$$

Por consiguiente,

$$dx = \frac{t^2+C}{2t^2}\,dt,$$

$$\sqrt{x^2+C} = -x+t = -\frac{t^2-C}{2t}+t = \frac{t^2+C}{2t}.$$

Retornando a la integral inicial, tenemos:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+C}} = \int \frac{\frac{t^2+C}{2t^2}\,dt}{\frac{t^2+C}{2t}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C_1 = \ln\left|x+\sqrt{x^2+C}\right| + C_1$$

(véase la fórmula 14 de la tabla de integrales).

2. *Segunda sustitución de Euler.* Si $c > 0$, pongamos

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm \sqrt{c},$$

entonces:

$$ax^2+bx+c = x^2t^2 + 2xt\sqrt{c} + c.$$

(Para mayor precisión hemos tomado el signo más delante de la raíz). De aquí x se define como función racional de t:

$$x = \frac{2\sqrt{c}\,t-b}{a-t^2}.$$

Puesto que dx y $\sqrt{ax^2+bx+c}$ también se expresan mediante funciones racionales de t, entonces sustituyendo los valores de x, $\sqrt{ax^2+bx+c}$ y dx en la integral $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$, reducimos esta última a la integral de una función racional de t.

Ejemplo 2. Calcular la integral

$$\int \frac{\left(1-\sqrt{1+x+x^2}\right)^2}{x^2\sqrt{1+x+x^2}}\,dx.$$

Solución. Pongamos $\sqrt{1+x+x^2} = xt+1$, entonces,

$$1+x+x^2 = x^2t^2+2xt+1; \quad x = \frac{2t-1}{1-t^2}; \quad dx = \frac{2t^2-2t+2}{(1-t^2)^2}\,dt;$$

$$\sqrt{1+x+x^2} = xt+1 = \frac{t^2-t+1}{1-t^2}; \quad 1-\sqrt{1+x+x^2} = \frac{-2t^2+t}{1-t^2}.$$

Sustituyendo las expresiones obtenidas en la integral inicial, encontramos:

$$\int \frac{\left(1-\sqrt{1+x+x^2}\right)^2}{x^2\sqrt{1+x+x^2}}\,dx = \int \frac{(-2t^2+t)^2(1-t^2)^2(1-t^2)(2t^2-2t+2)}{(1-t^2)^2(2t-1)^2(t^2-t+1)(1-t^2)^2}\,dx =$$

$$= +2\int \frac{t^2}{1-t^2}\,dt + C = -2t + \ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C =$$

$$= -\frac{2(\sqrt{1+x+x^2}-1)}{x} + \ln\left|\frac{x+\sqrt{1+x+x^2}-1}{x-\sqrt{1+x+x^2}+1}\right| + C =$$

$$= -\frac{2(\sqrt{1+x+x^2}-1)}{x} + \ln\left|2x+2\sqrt{1+x+x^2}+1\right| + C.$$

3. *Tercera sustitución de Euler.* Supongamos que α y β son raíces reales del trinomio ax^2+bx+c. Pongamos:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = (x-\alpha)\, t.$$

Siendo $ax^2+bx+c = a(x-\alpha)(x-\beta)$, tenemos:

$$\sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)} = (x-\alpha)\, t,$$

$$a(x-\alpha)(x-\beta) = (x-\alpha)^2 t^2,$$

$$a(x-\beta) = (x-\alpha)\, t^2.$$

De donde x se expresa como una función racional de t:

$$x = \frac{a\beta-\alpha t^2}{a-t^2}.$$

Puesto que dx y $\sqrt{ax^2+bx+c}$ son también funciones racionales de t, la integral dada se transforma en la integral de la función racional de t.

Observación 1. La tercera sustitución de Euler es aplicable no sólo cuando $a<0$, sino también cuando $a>0$; la única condición es que el polinomio ax^2+bx+c tenga dos raíces reales.

Ejemplo 3. Calcular la integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x-4}}.$$

Solución. Puesto que $x^2+3x-4=(x+4)(x-1)$, pongamos:

$$\sqrt{(x+4)(x-1)} = (x+4)\, t.$$

Entonces: $(x+4)(x-1)=(x+4)^2 t^2$, $x-1=(x+4)\, t^2$,

$$x=\frac{1+4t^2}{1-t^2}, \qquad dx=\frac{10t}{(1-t^2)^2}\, dt,$$

$$\sqrt{(x+4)(x-1)} = \left[\frac{1+4t^2}{1-t^2}+4\right] t = \frac{5t}{1-t^2}.$$

Retornando a la integral inicial, tenemos:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x-4}} = \int \frac{10t\,(1-t^2)}{(1-t^2)^2\, 5t}\, dt = \int \frac{2}{1-t^2}\, dt = \ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C =$$

$$= \ln\left|\frac{1+\sqrt{\frac{x-1}{x+4}}}{1-\sqrt{\frac{x-1}{x+4}}}\right| + C = \ln\left|\frac{\sqrt{x+4}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+4}-\sqrt{x-1}}\right| + C.$$

Observación 2. Notemos que para reducir la integral (1) a la integral de una función racional es suficiente utilizar la primera y la tercera sustituciones de Euler. Examinemos el trinomio $ax^2 + bx + c$. Si $b^2 - 4ac > 0$, las raíces del trinomio son reales y, por tanto, es aplicable la tercera sustitución de Euler. Si $b^2 - 4ac \leqslant \leqslant 0$, tenemos

$$ax^2 + bx + c = \frac{1}{4a}[(2ax + b)^2 + (4ac - b^2)]$$

y, por tanto, el trinomio tiene el mismo signo que a. Para que $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ sea real, hace falta que el trinomio sea positivo y, partiendo de aquí, *tiene que ser $a > 0$. En este caso se puede usar* la primera sustitución.

§ 13. INTEGRACION DE LOS BINOMIOS DIFERENCIALES

La expresión de la forma

$$x^m (a + bx^n)^p \, dx,$$

en la que m, n, p, a, b son números constantes se llama *binomio diferencial*.

Teorema. La *integral del binomio diferencial*

$$\int x^m (a + bx^n)^p \, dx,$$

puede reducirse, si m, n, p, son números racionales, a la integral de una función racional y, por consiguiente, puede expresarse mediante funciones elementales en los tres casos siguientes:

1) p *es un número entero* (positivo, negativo o cero);

2) $\dfrac{m+1}{n}$ *es un número entero* (positivo, negativo o cero);

3) $\dfrac{m+1}{n} + p$ *es un número entero* (positivo, negativo o cero).

Demostración. Transformemos la integral dada con ayuda de la sustitución

$$x = z^{\frac{1}{n}}, \quad dx = \frac{1}{n} z^{\frac{1}{n} - 1} dz .$$

Entonces:

$$\int x^m (a + bx^n)^p \, dx = \frac{1}{n} \int z^{\frac{m+1}{n} - 1} (a + bz)^p \, dz = \frac{1}{n} \int z^q (a + bz)^p \, dz, \quad (1)$$

donde

$$q = \frac{m+1}{n} - 1.$$

1. Sea p un número entero. Siendo q un número racional, designémoslo por $\frac{r}{s}$. En este caso, la integral (1), tiene la forma:

$$\int R\left(z^{\frac{r}{s}}, z\right) dz .$$

Hemos indicado en el § 11, cap. X, que una integral de este tipo puede reducirse a una función racional mediante la sustitución $z = t^s$.

2. Sea $\frac{m+1}{n}$ un número entero. Entonces $q = \frac{m+1}{n} - 1$ es también un número entero. El número p es racional, $p = \frac{\lambda}{\mu}$.

La integral (1) se reduce entonces, a una integral del tipo

$$\int R\left[z^q, (a+bz)^{\frac{\lambda}{\mu}}\right] dz.$$

Esta integral fue estudiada en el § 11, cap. X. Se puede reducirla a la integral de una función racional con ayuda de la sustitución

$$a + bz = t^{\mu}.$$

3. Sea $\frac{m+1}{n} + p$ un número entero. Pero, entonces, $\frac{m+1}{n} - 1 + p = q + p$ también es un número entero. Transformemos la integral (1):

$$\int z^q (a+bz)^p \, dz = \int z^{q+p} \left(\frac{a+bz}{z}\right)^p dz,$$

donde $q + p$ es un número entero y $p = \frac{k}{l}$ es un número racional. La última integral pertenece al grupo de integrales

$$\int R\left[z, \left(\frac{a+bz}{z}\right)^{\frac{k}{l}}\right] dz ,$$

Esta integral fue examinada en el § 11, cap. X. La integral indicada se reduce a la integral de una función racional mediante la sustitución $\frac{a+bz}{z} = t^l$.

Examinemos los ejemplos de la integración en todos los tres casos.

Ejemplo 1. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}(1+\sqrt[3]{x^2})} = \int x^{-\frac{2}{3}}(1+x^{\frac{2}{3}})^{-1}\,dx$. Aquí, $p=-1$ (número entero). Pongamos $x^{\frac{2}{3}}=z$, transformemos la igualdad hasta obtener entre paréntesis la expresión lineal respecto a z:

$$\int x^{-\frac{2}{3}}(1+x^{\frac{2}{3}})^{-1}\,dx = \int z^{-1}(1+z)^{-1}\frac{3}{2}z^{\frac{1}{2}}\,dz = \frac{3}{2}\int z^{-\frac{1}{2}}(1+z)^{-1}\,dz.$$

Hagamos la sustitución:

$$z^{\frac{1}{2}}=t.$$

Entonces, $z=t^2$, $dz=2t\,dt$, y

$$\int x^{-\frac{2}{3}}(1+x^{\frac{2}{3}})^{-1}\,dx = \frac{3}{2}\int z^{-\frac{1}{2}}(1+z)^{-1}\,dz = \frac{3}{2}\int t^{-1}(1+t^2)^{-1}\,2t\,dt =$$

$$= 3\int \frac{dt}{1+t^2} = 3\,\text{arctg}\,t + C = 3\,\text{arctg}\,\sqrt{z}+C = 3\,\text{arctg}\,\sqrt[3]{x}+C.$$

Ejemplo 2. $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int x^3(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx$. Aquí, $m=3$; $n=2$; $p=-\frac{1}{2}$, $\frac{m+1}{n}=2$ (número entero). Realicemos la sustitución $x^2=z$. Entonces, $x=z^{\frac{1}{2}}$, $dx=\frac{1}{2}z^{-\frac{1}{2}}\,dz$, y

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int z^{\frac{3}{2}}(1-z)^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{2}z^{-\frac{1}{2}}\,dz = \frac{1}{2}\int z(1-z)^{-\frac{1}{2}}\,dz.$$

Para transformar la expresión entre segundos paréntesis en racional, pongamos $(1-z)^{\frac{1}{2}}=t$; entonces: $1-z=t^2$; $z=t^2-1$; $dz=2t\,dt$.
Por consiguiente,

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{1}{2}\int z(1-z)^{-\frac{1}{2}}\,dz = \frac{1}{2}\int (t^2-1)\,t^{-1}2t\,dt = \int (t^2-1)\,dt =$$

$$= \frac{t^3}{3}-t+C = \frac{t}{3}(t^2-3)+C = \frac{\sqrt{1-z}}{3}(-z-2)+C =$$

$$= \frac{\sqrt{1-x^2}}{3}(-x^2-2)+C.$$

Ejemplo 3. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{(1+x^2)^3}} = \int x^{-2}(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}\,dx$. Aquí, $m=-2$, $n-2$, $p=-\frac{3}{2}$, y $\frac{m+1}{n}+p=-2$ (número entero).

Transformemos la expresión entre paréntesis en función lineal:

$$x^2=z; \qquad x=z^{\frac{1}{2}}; \qquad dx=\frac{1}{2}z^{-\frac{1}{2}}\,dz;$$

$$\int x^{-2}(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}dx=\int z^{-1}(1+z)^{-\frac{3}{2}}\frac{1}{2}z^{-\frac{1}{2}}dz=\frac{1}{2}\int z^{-\frac{3}{2}}(1+z)^{-\frac{3}{2}}dz=$$

$$=\frac{1}{2}\int z^{-3}\left(\frac{1+z}{z}\right)^{-\frac{3}{2}}dz.$$

El primer factor es una función racional. Para que el segundo factor sea racional también efectuemos la sustitución:

$$\left(\frac{1+z}{z}\right)^{\frac{1}{2}}=t;$$

Entonces:

$$\frac{1+z}{z}=t^2; \qquad z=\frac{1}{t^2-1}; \qquad dz=\frac{-2t\,dt}{(t^2-1)^2}.$$

Por consiguiente:

$$\int x^{-2}(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}dx=\frac{1}{2}\int z^{-3}\left(\frac{1+z}{z}\right)^{-\frac{3}{2}}dz=$$

$$=\frac{1}{2}\int (t^2-1)^3t^{-3}\frac{-2t\,dt}{(t^2-1)^2}=-\int\frac{t^2-1}{t^2}dt=-t-\frac{1}{t}+C=$$

$$=-\left(\frac{1+z}{z}\right)^{\frac{1}{2}}-\left(\frac{z}{1+z}\right)^{\frac{1}{2}}+C=-\left(\frac{1+x^2}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}-\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^{\frac{1}{2}}+C=$$

$$=-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C.$$

Observación. P.L. Chébishev, destacado matemático ruso, demostró que la integral de los binomios diferenciales, con exponentes racionales puede expresarse mediante funciones elementales solamente en los tres casos citados; (por supuesto, a condición de que $a\neq 0$ y $b\neq 0$). Si ninguno de los números p, $\frac{m+1}{n}$, $\frac{m+1}{n}+p$ es entero, esta integral no puede ser expresada por funciones elementales.

§ 14. INTEGRACION DE CIERTAS CLASES DE FUNCIONES TRIGONOMETRICAS

Hasta ahora hemos estudiado sistemáticamente las integrales de funciones algebraicas (racionales o irracionales). En el párrafo presente examinemos las integrales de ciertas clases de funciones no algebraicas, en primer lugar, de las funciones trigonométricas.

Examinemos la integral

$$\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)\, dx. \qquad (1)$$

Demostremos que esta integral, con ayuda de la sustitución,

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t \qquad (2)$$

se reduce siempre a una integral de una función racional. Expresemos $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ en función de $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ y, por consiguiente, en función de t:

$$\operatorname{sen} x = \frac{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{1} = \frac{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\operatorname{sen}^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}{1} = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \operatorname{sen}^2\frac{x}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Luego,

$$x = 2\operatorname{arctg} t, \qquad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Así, $\operatorname{sen} x$, $\cos x$ y dx quedan expresadas mediante funciones racionales de t. *Puesto que una función racional de funciones racionales es también racional*, sustituyendo las expresiones obtenidas en la integral (1), ésta se reduce a una integral de función racional:

$$\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)\, dx = \int R\left[\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right]\frac{2dt}{1+t^2}.$$

Ejemplo 1. Analicemos la integral

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x}.$$

En virtud de las fórmulas expuestas, tenemos:

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

La sustitución examinada ofrece la posibilidad de integrar cualquier función del tipo $R(\cos x, \operatorname{sen} x)$. Por eso, se llama, a veces «sustitución trigonométrica universal». Sin embargo, en la práctica esta sustitución conduce a menudo a funciones racionales demasiado complicadas. Por esto, siempre es preferible conocer, aparte de la sustitución «universal» otras sustituciones, que, a veces, conducen más rápidamente al objetivo.

1) Si la integral tiene la forma $\int R(\operatorname{sen} x) \cos x \, dx$, la sustitución $\operatorname{sen} x = t$, $\cos x \, dx = dt$, reduce la integral a una integral de la forma $\int R(t) \, dt$.

2. Si la integral tiene la forma $\int R(\cos x) \operatorname{sen} x \, dx$, la sustitución $\cos x = t$, $\operatorname{sen} x \, dx = -dt$, reduce la integral a una integral de función racional.

3) Si el integrando sólo es función de $\operatorname{tg} x$, la sustitución $\operatorname{tg} x = t$, $x = \operatorname{arctg} t$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$ reduce la integral a una integral de función racional:

$$\int R(\operatorname{tg} x) \, dx = \int R(t) \frac{dt}{1+t^2}.$$

4) Si el integrando tiene la forma $R(\operatorname{sen} x, \cos x)$, donde las potencias de $\operatorname{sen} x$ y de $\cos x$ son exclusivamente pares, se usa la misma sustitución:

$$\operatorname{tg} x = t, \tag{2'}$$

puesto que $\operatorname{sen}^2 x$ y $\cos^2 x$ se expresan mediante expresiones racionales de $\operatorname{tg} x$:

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1+t^2},$$

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2},$$

$$dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

Después de realizar la sustitución, obtenemos la integral de una función racional.

Ejemplo 2. Calcular la integral $\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{2+\cos x} \, dx$.

Solución. Esta integral se reduce fácilmente a una de la forma $\int R(\cos x) \operatorname{sen} x \, dx$.

En efecto,

$$\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{2+\cos x}\,dx=\int \frac{\operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen} x\,dx}{2+\cos x}=\int \frac{1-\cos^2 x}{2+\cos x}\operatorname{sen} x\,dx.$$

Efectuemos la sustitución $\cos x=z$. Entonces, $\operatorname{sen} x\,dx=-dz$:

$$\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{2+\cos x}\,dx=\int \frac{1-z^2}{2+z}(-dz)=\int \frac{z^2-1}{z+2}\,dz=\int \left(z-2+\frac{3}{z+2}\right)dz=$$

$$=\frac{z^2}{2}-2z+3\ln(z+2)+C=\frac{\cos^2 x}{2}-2\cos x+3\ln(\cos x+2)+C.$$

Ejemplo 3. *Calcular* $\int \frac{dx}{2-\operatorname{sen}^2 x}$.

Efectuemos la sustitución $\operatorname{tg} x=t$:

$$\int \frac{dx}{2-\operatorname{sen}^2 x}=\int \frac{dt}{\left(2-\frac{t^2}{1+t^2}\right)(1+t^2)}=\int \frac{dt}{2+t^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}}+C=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right)+C.$$

5) Examinemos ahora una integral más, de la forma $\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)\,dx$, aquí bajo el signo de integral se encuentra el producto $\operatorname{sen}^m x \cos^n x\,dx$ (donde m y n son números enteros). Es preciso estudiar tres casos.

a) $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\,dx$, donde por lo menos uno de los números m y n es impar. Para evitar toda ambigüedad, supongamos que n es impar. Hagamos $n=2p+1$ y transformemos la integral:

$$\int \operatorname{sen}^m x \cos^{2p+1} x\,dx=\int \operatorname{sen}^m x \cos^{2p} x \cos x\,dx=$$

$$=\int \operatorname{sen}^m x\,(1-\operatorname{sen}^2 x)^p \cos x\,dx.$$

Efectuemos el cambio de variable:

$$\operatorname{sen} x=t,\quad \cos x\,dx=dt.$$

Sustituyendo la nueva variable en la integral dada, obtenemos:

$$\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\,dx=\int t^m(1-t^2)^p\,dt,$$

que es la integral de una función racional de t.

Ejemplo 4.

$$\int \frac{\cos^3 x}{\operatorname{sen}^4 x}\,dx=\int \frac{\cos^2 x \cos x\,dx}{\operatorname{sen}^4 x}=\int \frac{(1-\operatorname{sen}^2 x)\cos x\,dx}{\operatorname{sen}^4 x}.$$

Designando $\operatorname{sen} x=t$, $\cos x\,dx=dt$, obtenemos:

$$\int \frac{\cos^3 x}{\operatorname{sen}^4 x}\,dx=\int \frac{(1-t^2)\,dt}{t^4}=\int \frac{dt}{t^4}-\int \frac{dt}{t^2}=-\frac{1}{3t^3}+\frac{1}{t}+C=$$

$$=-\frac{1}{3\operatorname{sen}^3 x}+\frac{1}{\operatorname{sen} x}+C.$$

b) $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\, dx$, donde m y n son números no negativos y pares.

Pongamos $m = 2p$, $n = 2q$. Escribamos las conocidas fórmulas trigonométricas:

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x, \qquad \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x. \tag{3}$$

Sustituyéndolas en la integral, obtenemos:

$$\int \operatorname{sen}^{2p} x \cos^{2q} x\, dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\right)^p \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x\right)^q dx.$$

Ejecutando operaciones de elevar a potencia y abrir los paréntesis, obtenemos términos que contienen $\cos 2x$ en potencias pares e impares. Los términos que contienen las potencias impares, se integran como hemos indicado en el caso a). Los términos que tienen las potencias pares, los reduciamos de nuevo, utilizando sucesivamente las fórmulas (3). Procediendo de esta manera llegamos hasta los términos de la forma $\int \cos kx\, dx$, que pueden integrarse fácilmente.

Ejemplo 5.

$$\int \operatorname{sen}^4 x\, dx = \frac{1}{2^2}\int (1-\cos 2x)^2\, dx = \frac{1}{4}\int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{4}\left[x - \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{2}\int (1+\cos 4x)\, dx\right] = \frac{1}{4}\left[\frac{3}{2}x - \operatorname{sen} 2x + \frac{\operatorname{sen} 4x}{8}\right] + C.$$

c) Si los dos exponentes son pares y, por lo menos, uno de ellos es negativo, el método indicado en el caso anterior b) no da resultado. Es preciso hacer la sustitución

$$\operatorname{tg} x = t \quad (\text{ó } \operatorname{cotg} x = t).$$

Ejemplo 6.

$$\int \frac{\operatorname{sen}^2 x\, dx}{\cos^6 x} = \int \frac{\operatorname{sen}^2 x (\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x)^2}{\cos^6 x}\, dx = \int \operatorname{tg}^2 x (1 + \operatorname{tg}^2 x)^2\, dx.$$

Hagamos $\operatorname{tg} x = t$, entonces, $x = \operatorname{arctg} t$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$ y obtenemos:

$$\int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^6 x}\, dx = \int t^2 (1+t^2)^2 \frac{dt}{1+t^2} = \int t^2 (1+t^2)\, dt =$$

$$= \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + C = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + \frac{\operatorname{tg}^5 x}{5} + C.$$

6) En conclusión examinemos las integrales de la forma siguiente:

$$\int \cos mx \cos nx\, dx, \qquad \int \operatorname{sen} mx \cos nx\, dx, \qquad \int \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx\, dx.$$

Estas se pueden calcular con ayuda de las siguientes*) fórmulas ($m \neq n$):

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x],$$

$$\operatorname{sen} mx \cos nx = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(m+n)x + \operatorname{sen}(m-n)x],$$

$$\operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx = \frac{1}{2}[-\cos(m+n)x + \cos(m-n)x].$$

Sustituyendo e integrando, obtenemos:

$$\int \cos mx \cos nx\, dx = \frac{1}{2}\int [\cos(m+n)x + \cos(m-n)x]\, dx =$$

$$= \frac{\operatorname{sen}(m+n)x}{2(m+n)} + \frac{\operatorname{sen}(m-n)x}{2(m-n)} + C.$$

Del modo análogo se calculan las otras dos integrales.

Ejemplo 7.

$$\int \operatorname{sen} 5x \operatorname{sen} 3x\, dx = \frac{1}{2}\int [-\cos 8x + \cos 2x]\, dx = -\frac{\operatorname{sen} 8x}{16} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + C.$$

§ 15. INTEGRACION DE CIERTAS FUNCIONES IRRACIONALES CON AYUDA DE SUSTITUCIONES TRIGONOMETRICAS

Regresemos a la integral examinada en el § 12 cap. X,

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\, dx \tag{1}$$

Mostremos aquí cómo esta integral puede transformarse en una integral de la forma

$$\int \overline{R}(\operatorname{sen} z, \cos z)\, dz, \tag{2}$$

estudiada en el párrafo anterior.

*) Estas fórmulas se calculan fácilmente de la manera siguiente:

$$\cos(m+n)x = \cos mx \cos nx - \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx,$$

$$\cos(m-n)x = \cos mx \cos nx + \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx.$$

Sumando estas igualdades término a término y dividiéndolas por dos, obtenemos la primera de las tres fórmulas indicadas. Restando término a término y dividiendo por dos, obtenemos la tercera de estas fórmulas. La segunda fórmula se obtiene de modo análogo, escribiendo las igualdades idénticas para $\operatorname{sen}(m+n)x$ y $\operatorname{sen}(m-n)x$ y sumándolas término a término.

Transformemos el trinomio que figura bajo signo de la raíz:

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(c-\frac{b^2}{4a}\right).$$

Efectuemos el cambio de variable, haciendo

$$x+\frac{b}{2a}=t, \qquad dx=dt.$$

Entonces:

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{at^2+\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)}.$$

Examinemos todos los casos posibles.

1. Sea: $a>0$, $c-\frac{b^2}{4a}>0$. Introduzcamos las designaciones $a=m^2$, $c-\frac{b}{4a}=n^2$. En este caso tenemos:

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{m^2t^2+n^2}.$$

2) Sea: $a>0$, $c-\frac{b^2}{4a}<0$. Entonces, $a=m^2$, $c-\frac{b^2}{4a}=-n^2$. Por consiguiente,

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{m^2t^2-n^2}.$$

3) Sea: $a<0$, $c-\frac{b^2}{4a}>0$. Entonces, $a=-m^2$, $c-\frac{b^2}{4a}=n^2$. Por consiguiente,

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{n^2-m^2t^2}.$$

4) Sea: $a<0$, $c-\frac{b^2}{4a}<0$. En este caso $\sqrt{ax^2+bx+c}$ es un número complejo, para todo valor de x.

Así, la integral (1) puede reducirse a una de las siguientes clases de integrales:

$$\text{I.} \quad \int R\left(t, \sqrt{m^2t^2+n^2}\right) dt. \tag{3.1}$$

$$\text{II.} \quad \int R\left(t, \sqrt{m^2t^2-n^2}\right) dt. \tag{3.2}$$

$$\text{III.} \quad \int R\left(t, \sqrt{n^2-m^2t^2}\right) dt. \tag{3.3}$$

Es evidente que la integral (3.1) se reduce a una integral de la forma (2), con ayuda de la sustitución $t=\frac{n}{m}\operatorname{tg} z$. La integral (3.2) se reduce a una integral de la forma (2) mediante la sustitución

$t = \frac{n}{m} \sec z$. La integral (3.3) se reduce a una integral de la forma (2) mediante la sustitución $t = \frac{n}{m} \operatorname{sen} t$.

Ejemplo. *Calcular la integral* $\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}$

Solución. Es la integral del tipo III. Hagamos la sustitución $x = a \operatorname{sen} z$, entonces: $dx = a \cos z \, dz$,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}} = \int \frac{a \cos z \, dz}{\sqrt{(a^2-a^2 \operatorname{sen}^2 z)^3}} = \int \frac{a \cos z \, dz}{a^3 \cos^3 z} = \frac{1}{a^2} \int \frac{dz}{\cos^2 z} =$$
$$= \frac{1}{a^2} \operatorname{tg} z + C = \frac{1}{a^2} \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z} = \frac{1}{a^2} \frac{\operatorname{sen} z}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 z}} + C = \frac{1}{a^2} \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} + C.$$

§ 16. FUNCIONES CUYAS INTEGRALES NO PUEDEN EXPRESARSE MEDIANTE LAS FUNCIONES ELEMENTALES

Hemos indicado (sin demostración) en el § 1 cap. X que toda función $f(x)$, continua en el intervalo (a, b), tiene en este intervalo una función primitiva, es decir, existe una función $F(x)$ tal que

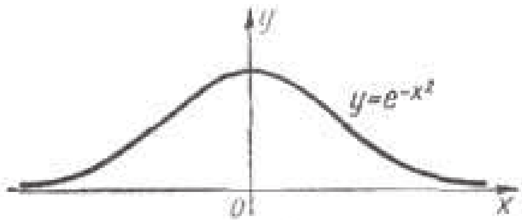

Fig. 204

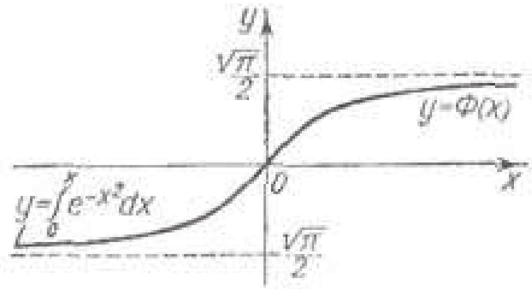

Fig. 205

$F'(x) = f(x)$. Sin embargo, no **cada función primitiva,** incluso cuando ésta existe, **puede expresarse mediante un número finito de funciones elementales.**

Así, por ejemplo, hemos indicado, que las funciones primitivas de los binomios diferenciales no pertenecientes a las tres formas estudiadas, no pueden ser expresadas mediante un número finito de funciones elementales (teorema de Chébishev). Tales son, por ejemplo, las funciones primitivas expresadas por las integrales

$$\int e^{-x^2}\,dx, \int \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx, \int \frac{\cos x}{x}\,dx, \int \sqrt{1-k^2 \operatorname{sen} x}\,dx, \int \frac{dx}{\ln x}$$

y muchas otras.

En todos estos casos la función primitiva representa evidentemente, otra función que no se expresa mediante una combinación de un número finito de funciones elementales.

Así, por ejemplo, la función primitiva $\int e^{-x^2}dx + C$, que se anula para $x = 0$, se llama *función de Laplace* y se designa por $\Phi(x)$. Por tanto,

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int e^{-x^2}dx + C_1, \text{ si } \Phi(0) = 0.$$

Esta función está bien estudiada. Existen tablas de sus valores para diferentes valores de x. En el § 21 cap. XVI (tomo II) veremos, como puede ser realizado esto. En las figuras 204 y 205 se dan respectivamente la gráfica del integrando

$$y = e^{-x^2}$$

y la gráfica de la función de Laplace $y = \Phi(x)$. La función primitiva

$$\int \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 x}\, dx + C \qquad (k < 1)$$

que se anula cuando x sea igual a cero, se llama *integral elíptica* y se designa por $E(x)$,

$$E(x) = \int \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 x}\, dx + C_2, \text{si } E(0) = 0.$$

Existen también tablas de los valores de esta función para diferentes valores de x.

Ejercicios para el capítulo X

I. Calcular las integrales:

1. $\int x^5\,dx$. *Resp.* $\frac{x^6}{6} + C$. **2.** $\int (x + \sqrt{x})\,dx$. *Resp.* $\frac{x^2}{2} + \frac{2x\sqrt{x}}{3} + C$. **3.** $\int \left(\frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x}}{4}\right)dx$. *Resp.* $6\sqrt{x} - \frac{1}{10}x^2\sqrt{x} + C$. **4.** $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x}}$. *Resp.* $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + C$. **5.** $\int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{4}{x\sqrt{x}} + 2\right)dx$. *Resp.* $-\frac{1}{x} - \frac{8}{\sqrt{x}} + 2x + C$. **6.** $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x}}$. *Resp.* $\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3} + C$. **7.** $\int \left(x^2 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2 dx$. *Resp.* $\frac{x^5}{5} + \frac{3}{4}x^2\sqrt[3]{x^2} + 3\sqrt[3]{x} + C$.

Integración por sustitución: **8.** $\int e^{5x}\,dx$. *Resp.* $\frac{1}{5}e^{5x} + C$. **9.** $\int \cos 5x\,dx$. *Resp.* $\frac{\operatorname{sen} 5x}{5} + C$. **10.** $\int \operatorname{sen} ax\,dx$. *Resp.* $-\frac{\cos ax}{a} + C$. **11.** $\int \frac{\ln x}{x}dx$. *Resp.* $\frac{1}{2}\ln^2 x + C$. **12.** $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 3x}$. *Resp.* $-\frac{\operatorname{cotg} 3x}{3} + C$. **13.** $\int \frac{dx}{\cos^2 7x}$. *Resp.* $\frac{\operatorname{tg} 7x}{7} + C$. **14.** $\int \frac{dx}{3x-7}$. *Resp.* $\frac{1}{3}\ln|3x-7| + C$. **15.** $\int \frac{dx}{1-x}$. *Resp.* $-\ln|1-x| + C$. **16.** $\int \frac{dx}{5-2x}$. *Resp.* $-\frac{1}{2}\ln|5-2x| + C$. **17.** $\int \operatorname{tg} 2x\,dx$.

Resp. $-\frac{1}{2}\ln|\cos 2x|+C$. **18.** $\int \operatorname{cotg}(5x-7)\,dx$. *Resp.* $\frac{1}{5}\ln|\operatorname{sen}(5x-7)|+C$.
19. $\int \frac{dy}{\operatorname{cotg} 3y}$. *Resp.* $-\frac{1}{3}\ln|\cos 3y|+C$. **20.** $\int \operatorname{cotg}\frac{x}{3}\,dx$. *Resp.* $3\ln\left|\operatorname{sen}\frac{x}{3}\right|+C$. **21.** $\int \operatorname{tg}\varphi\, \operatorname{sc}^2\varphi\, d\varphi$. *Resp.* $\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\varphi+C$. **22.** $\int(\operatorname{cotg} e^x)\,e^x\,dx$. *Resp.* $\ln|\operatorname{sen} e^x|+C$. **23.** $\int\left(\operatorname{tg}4S-\operatorname{cotg}\frac{S}{4}\right)dS$. *Resp.* $-\frac{1}{4}\ln|\cos 4S|-$ $-4\ln\left|\operatorname{sen}\frac{S}{4}\right|+C$. **24.** $\int \operatorname{sen}^2 x\cos x\,dx$. *Resp.* $\frac{\operatorname{sen}^3 x}{3}+C$.
25. $\int \cos^3 x\operatorname{sen} x\,dx$. *Resp.* $-\frac{\cos^4 x}{4}+C$. **26.** $\int \sqrt{x^2+1}\,x\,dx$. *Resp.* $\frac{2}{3}\sqrt{(x^2+1)^3}+C$. **27.** $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{2x^2+3}}$. *Resp.* $\frac{1}{2}\sqrt{2x^2+3}+C$.
28. $\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^3+1}}$. *Resp.* $\frac{2}{3}\sqrt{x^3+1}+C$. **29.** $\int\frac{\cos x\,dx}{\operatorname{sen}^2 x}$. *Resp.* $-\frac{1}{\operatorname{sen} x}+C$.
30. $\int\frac{\operatorname{sen} x\,dx}{\cos^3 x}$. *Resp.* $\frac{1}{2\cos^2 x}+C$. **31.** $\int\frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}\,dx$. *Resp.* $\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2}+C$.
32. $\int\frac{\operatorname{cotg} x}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx$. *Resp.* $-\frac{\operatorname{cotg}^2 x}{2}+C$. **33.** $\int\frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{\operatorname{tg} x-1}}$. *Resp.* $2\sqrt{\operatorname{tg} x-1}+C$. **34.** $\int\frac{\ln(x+1)}{x+1}\,dx$. *Resp.* $\frac{\ln^2(x+1)}{2}+C$. **35.** $\int\frac{\cos x\,dx}{\sqrt{2\operatorname{sen} x+1}}$. *Resp.* $\sqrt{2\operatorname{sen} x+1}+C$. **36.** $\int\frac{\operatorname{sen} 2x\,dx}{(1+\cos 2x)^2}$. *Resp.* $\frac{1}{2(1+\cos 2x)}+C$.
37. $\int\frac{\operatorname{sen} 2x\,dx}{\sqrt{1+\operatorname{sen}^2 x}}$. *Resp.* $2\sqrt{1+\operatorname{sen}^2 x}+C$. **38.** $\int\frac{\sqrt{\operatorname{tg} x+1}}{\cos^2 x}\,dx$. *Resp.* $\frac{2}{3}\sqrt{(\operatorname{tg} x+1)^3}+C$. **39.** $\int\frac{\cos 2x\,dx}{(2+3\operatorname{sen} 2x)^3}$. *Resp.* $-\frac{1}{12}\frac{1}{(2+3\operatorname{sen} 2x)^2}+C$.
40. $\int\frac{\operatorname{sen} 3x\,dx}{\sqrt[3]{\cos^4 3x}}$. *Resp.* $\frac{1}{\sqrt[3]{\cos 3x}}+C$. **41.** $\int\frac{\ln^2 x\,dx}{x}$. *Resp.* $\frac{\ln^3 x}{3}+C$.
42. $\int\frac{\operatorname{arcsen} x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$. *Resp.* $\frac{\operatorname{arcsen}^2 x}{2}+C$. **43.** $\int\frac{\operatorname{arctg} x\,dx}{1+x^2}$. *Resp.* $\frac{\operatorname{arctg}^2 x}{2}+C$. **44.** $\int\frac{\arccos^2 x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$. *Resp.* $-\frac{\arccos^3 x}{3}+C$. **45.** $\frac{\operatorname{arccotg} x}{1+x^2}\,dx$. *Resp.* $-\frac{\operatorname{arccotg}^2 x}{2}+C$. **46.** $\int\frac{x\,dx}{x^2+1}$. *Resp.* $\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$.
47. $\int\frac{x+1}{x^2+2x+3}\,dx$. *Resp.* $\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+3)+C$. **48.** $\int\frac{\cos x\,dx}{2\operatorname{sen} x+3}$. *Resp.* $\frac{1}{2}\ln(2\operatorname{sen} x+3)+C$. **49.** $\int\frac{dx}{x\ln x}$. *Resp.* $\ln|\ln x|+C$. **50.** $\int 2x(x^2+1)^4\,dx$. *Resp.* $\frac{(x^2+1)^5}{5}=C$. **51.** $\int \operatorname{tg}^4 x\,dx$. *Resp.* $\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3}-\operatorname{tg} x+x+C$.
52. $\int\frac{dx}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x}$. *Resp.* $\ln|\operatorname{arctg} x|+C$. **53.** $\int\frac{dx}{\cos^2 x(3\operatorname{tg} x+1)}$. *Resp.* $\frac{1}{3}\ln|3\operatorname{tg} x+1|+C$. **54.** $\int\frac{\operatorname{tg}^3 x}{\cos^2 x}\,dx$. *Resp.* $\frac{\operatorname{tg}^4 x}{4}+C$. **55.** $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\operatorname{arcsen} x}$.

Resp. $\ln|\arcsin x|+C$. **56.** $\int \frac{\cos 2x}{2+3\operatorname{sen} 2x}\,dx$. *Resp.* $\frac{1}{6}\ln|2+3\operatorname{sen} 2x|+C$. **57.** $\int \cos(\ln x)\frac{dx}{x}$. *Resp.* $\operatorname{sen}(\ln x)+C$. **58.** $\int \cos(a+bx)\,dx$. *Resp.* $\frac{1}{b}\operatorname{sen}(a+bx)+C$. **59.** $\int e^{2x}\,dx$. *Resp.* $\frac{1}{2}e^{2x}+C$. **60.** $\int e^{\frac{x}{3}}\,dx$. *Resp.* $3e^{\frac{x}{3}}+C$. **61.** $\int e^{\operatorname{sen} x}\cos x\,dx$. *Resp.* $e^{\operatorname{sen} x}+C$. **62.** $\int a^{x^2}x\,dx$. *Resp.* $\frac{a^{x^2}}{2\ln a}+C$. **63.** $\int e^{\frac{x}{a}}\,dx$. *Resp.* $ae^{\frac{x}{a}}+C$. **64.** $\int (e^{2x})^2\,dx$. *Resp.* $\frac{1}{4}e^{4x}+C$. **65.** $\int 3^x e^x\,dx$. *Resp.* $\frac{3^x e^x}{\ln 3+1}+C$. **66.** $\int e^{-3x}\,dx$. *Resp.* $-\frac{1}{3}e^{-3x}+C$. **67.** $\int (e^{5x}+a^{5x})\,dx$. *Resp.* $\frac{1}{5}\left(e^{5x}+\frac{a^{5x}}{\ln a}+C\right)$. **68.** $\int e^{x^2+4x+3}(x+2)\,dx$. *Resp.* $\frac{1}{2}e^{x^2+4x+3}+C$. **69.** $\int \frac{(a^x-b^x)^2}{a^x b^x}\,dx$. *Resp.* $\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^x-\left(\frac{b}{a}\right)^x}{\ln a-\ln b}-2x+C$. **70.** $\int \frac{e^x\,dx}{3+4e^x}$. *Resp.* $\frac{1}{4}\ln(3+4e^x)+C$. **71.** $\int \frac{e^{2x}\,dx}{2+e^{2x}}$. *Resp.* $\frac{1}{2}\ln(2+e^{2x})+C$. **72.** $\int \frac{dx}{1+2x^2}$. *Resp.* $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x)+C$. **73.** $\int \frac{dx}{\sqrt{1-3x^2}}$. *Resp.* $\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin(\sqrt{3}x)+C$. **74.** $\int \frac{dx}{\sqrt{16-9x^2}}$. *Resp.* $\frac{1}{3}\arcsin\frac{3x}{4}+C$. **75.** $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$. *Resp.* $\arcsin\frac{x}{3}+C$. **76.** $\int \frac{dx}{4+x^2}$. *Resp.* $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C$. **77.** $\int \frac{dx}{9x^2+4}$. *Resp.* $\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{3x}{2}+C$. **78.** $\int \frac{dx}{4-9x^2}$. *Resp.* $\frac{1}{12}\ln\left|\frac{2+3x}{2-3x}\right|+$ $+C$. **79.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+9}}$. *Resp.* $\ln|x+\sqrt{x^2+9}|+C$. **80.** $\int \frac{dx}{\sqrt{b^2x^2-a^2}}$. *Resp.* $\frac{1}{b}\ln|bx+\sqrt{b^2x^2-a^2}|+C$. **81.** $\int \frac{dx}{\sqrt{b^2+a^2x^2}}$. *Resp.* $\frac{1}{a}\ln|ax+\sqrt{b^2+a^2x^2}|+$ $+C$. **82.** $\int \frac{dx}{a^2x^2-c^2}$. *Resp.* $\frac{1}{2ac}\ln\left|\frac{ax-c}{ax+c}\right|+C$. **83.** $\int \frac{x^2\,dx}{5-x^6}$. *Resp.* $\frac{1}{6\sqrt{5}}\ln\left|\frac{x^3+\sqrt{5}}{x^3-\sqrt{5}}\right|+C$. **84.** $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$. *Resp.* $\frac{1}{2}\arcsin x^2+C$. **85.** $\int \frac{x\,dx}{x^4+a^4}$. *Resp.* $\frac{1}{2a^2}\operatorname{arctg}\frac{x^2}{a^2}+C$. **86.** $\int \frac{e^x\,dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}$. *Resp.* $\arcsin e^x+$ $+C$. **87.** $\int \frac{dx}{\sqrt{3-5x^2}}$. *Resp.* $\frac{1}{\sqrt{5}}\arcsin\sqrt{\frac{5}{3}}x+C$. **88.** $\int \frac{\cos x\,dx}{a^2+\operatorname{sen}^2 x}$. *Resp.* $\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{a}\right)+C$. **89.** $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$. *Resp.* $\arcsin(\ln x)+C$.

90. $\int \frac{\arccos x - x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$. *Resp.* $-\frac{1}{2}(\arccos x)^2 + \sqrt{1-x^2} + C$. **91.** $\int \frac{x - \operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx$. *Resp.* $\frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \frac{1}{2}(\operatorname{arctg} x)^2 + C$. **92.** $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}\,dx$. *Resp.* $\frac{2}{3}\sqrt{(1+\ln x)^3} + C$. **93.** $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$. *Resp.* $\frac{4}{3}\sqrt{(1+\sqrt{x})^3} + C$. **94.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{x}}}$. *Resp.* $4\sqrt{1+\sqrt{x}} + C$. **95.** $\int \frac{e^x\,dx}{1+e^{2x}}$. *Resp.* $\operatorname{arctg} e^x + C$. **96.** $\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt[3]{\operatorname{sen}^2 x}}$. *Resp.* $3\sqrt[3]{\operatorname{sen} x} + C$. **97.** $\int \sqrt{1+3\cos^2 x}\,\operatorname{sen} 2x\,dx$. *Resp.* $-\frac{2}{9}\sqrt{(1+3\cos^2 x)^3} + C$. **98.** $\int \frac{\operatorname{sen} 2x\,dx}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$. *Resp.* $-2\sqrt{1+\cos^2 x} + C$. **99.** $\int \frac{\cos^3 x}{\operatorname{sen}^4 x}\,dx$. *Resp.* $\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{3\operatorname{sen}^3 x} + C$. **100.** $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 x}}{\cos^2 x}\,dx$. *Resp.* $\frac{3}{5}\sqrt[3]{\operatorname{tg}^5 x} + C$. **101.** $\int \frac{dx}{2\operatorname{sen}^2 x + 3\cos^2 x}$. *Resp.* $\frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\operatorname{tg} x\right) + C$. Integrales del tipo $\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\,dx$. **102.** $\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$. *Resp.* $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2} + C$. **103.** $\int \frac{dx}{3x^2-2x+4}$. *Resp.* $\frac{1}{\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\frac{3x-1}{\sqrt{11}} + C$. **104.** $\int \frac{dx}{x^2+3x+1}$. *Resp.* $\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2x+3-\sqrt{5}}{2x+3+\sqrt{5}}\right| + C$. **105.** $\int \frac{dx}{x^2-6x+5}$. *Resp.* $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-5}{x-1}\right| + C$. **106.** $\int \frac{dz}{2z^2-2z+1}$. *Resp.* $\operatorname{arctg}(2z-1) + C$. **107.** $\int \frac{dx}{3x^2-2x+2}$. *Resp.* $\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{3x-1}{\sqrt{5}} + C$. **108.** $\int \frac{(6x-7)\,dx}{3x^2-7x+11}$. *Resp.* $\ln|3x^2-7x+11| + C$. **109.** $\int \frac{(3x-2)\,dx}{5x^2-3x+2}$. *Resp.* $\frac{3}{10}\ln(5x^2-3x+2) - \frac{11}{5\sqrt{31}}\operatorname{arctg}\frac{10x-3}{\sqrt{31}} + C$. **110.** $\int \frac{3x-1}{x^2-x+1}\,dx$. *Resp.* $\frac{3}{2}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C$. **111.** $\int \frac{7x+1}{6x^2+x-1}\,dx$. *Resp.* $\frac{2}{3}\ln(3x-1) + \frac{1}{2}\ln(2x+1) + C$. **112.** $\int \frac{2x-1}{5x^2-x+2}\,dx$. *Resp.* $\frac{1}{5}\ln(5x^2-x+2) + \frac{8}{5\sqrt{39}}\operatorname{arctg}\frac{10x-1}{\sqrt{39}} + C$. **113.** $\int \frac{6x^4-5x^3+4x^2}{2x^2-x+1}\,dx$. *Resp.* $x^3 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{4}\ln|2x^2-x+1| + \frac{1}{2\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{4x-1}{\sqrt{7}} + C$. **114.** $\int \frac{dx}{2\cos^2 x + \operatorname{sen} x\cos x + \operatorname{sen}^2 x}$. *Resp.* $\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg} x + 1}{\sqrt{7}} + C$. Integrales del tipo $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+C}}\,dx$:

115. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x-4x^2}}$. *Resp.* $\frac{1}{2}\operatorname{arcsen}\frac{8x+3}{\sqrt{41}}+C$. **116.** $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x+x^2}}$. *Resp.* $\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right|+C$. **117.** $\int \frac{dS}{\sqrt{2aS+S^2}}$. *Resp.* $\ln|S+a+\sqrt{2aS+S^2}|+C$. **118.** $\int \frac{dx}{\sqrt{5-7x-3x^2}}$. *Resp.* $\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arcsen}\frac{6x+7}{\sqrt{109}}+C$. **119.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x(3x+5)}}$. *Resp.* $\frac{1}{\sqrt{3}}\ln|6x+5+\sqrt{12x(3x+5)}|+C$. **120.** $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x-x^2}}$. *Resp.* $\operatorname{arcsen}\frac{2x+3}{\sqrt{17}}+C$. **121.** $\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2-x-1}}$. *Resp.* $\frac{1}{\sqrt{5}}\ln|10x-1+\sqrt{20(5x^2-x-1)}|+C$. **122.** $\int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+C}}\,dx$. *Resp.* $2\sqrt{ax^2+bx+c}+C$. **123.** $\int \frac{(x+3)\,dx}{\sqrt{4x^2+4x+3}}$. *Resp.* $\frac{1}{4}\sqrt{4x^2+4x+3}+\frac{5}{4}\ln|2x+1+\sqrt{4x^2+4x+3}|+C$. **124.** $\int \frac{(x-3)\,dx}{\sqrt{3+66x-11x^2}}$. *Resp.* $-\frac{1}{11}\sqrt{3+66x-11x^2}+C$. **125.** $\int \frac{(x+3)\,dx}{\sqrt{3+4x-4x^2}}$. *Resp.* $-\frac{1}{4}\sqrt{3+4x-4x^2}+\frac{7}{4}\operatorname{arcsen}\frac{2x-1}{2}+C$. **126.** $\int \frac{3x+5}{\sqrt{x(2x-1)}}\,dx$. *Resp.* $\frac{3}{2}\sqrt{2x^2-x}+\frac{23}{4\sqrt{2}}\ln(4x-1+\sqrt{8(2x^2-x)})+C$.

II. Integración por partes:

127. $\int xe^x\,dx$. *Resp.* $e^x(x-1)+C$. **128.** $\int x\ln x\,dx$. *Resp.* $\frac{1}{2}x^2\left(\ln x-\frac{1}{2}\right)+C$. **129.** $\int x\operatorname{sen}x\,dx$. *Resp.* $\operatorname{sen}x-x\cos x+C$. **130.** $\int \ln x\,dx$. *Resp.* $x(\ln x-1)+C$. **131.** $\int \operatorname{arcsen}x\,dx$. *Resp.* $x\operatorname{arcsen}x+\sqrt{1-x^2}+C$. **132.** $\int \ln(1-x)\,dx$. *Resp.* $-x-(1-x)\ln(1-x)+C$. **133.** $\int x^n\ln x\,dx$. *Resp.* $\frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln x-\frac{1}{n+1}\right)+C$. **134.** $\int x\operatorname{arctg}x\,dx$. *Resp.* $\frac{1}{2}[(x^2+1)\operatorname{arctg}x-x]+C$. **135.** $\int x\operatorname{arcsen}x\,dx$. *Resp.* $\frac{1}{4}[(2x^2-1)\operatorname{arcsen}x+x\sqrt{1-x^2}]+C$. **136.** $\int \ln(x^2+1)\,dx$. *Resp.* $x\ln(x+1)-2x+2\operatorname{arctg}x+C$. **137.** $\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx$. *Resp.* $(x+1)\operatorname{arctg}\sqrt{x}-\sqrt{x}+C$. **138.** $\int \frac{\operatorname{arcsen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$. *Resp.* $2\sqrt{x}\operatorname{arcsen}\sqrt{x}+2\sqrt{1-x}+C$. **139.** $\int \operatorname{arcsen}\sqrt{\frac{x}{x+1}}\,dx$. *Resp.* $x\operatorname{arcsen}\sqrt{\frac{x}{x+1}}-\sqrt{x}+\operatorname{arctg}\sqrt{x}+C$.

140. $\int x\cos^2 x\,dx$. *Resp.* $\frac{x^2}{4}+\frac{1}{4}x\,\mathrm{sen}\,2x+\frac{1}{8}\cos 2x+C$. **141.** $\int \frac{x\,\mathrm{arcsen}\,x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$. *Resp.* $x-\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{arcsen}\,x+C$. **142.** $\int \frac{x\,\mathrm{arctg}\,x}{(x^2+1)^2}\,dx$. *Resp.* $\frac{x}{4(1+x^2)}+\frac{1}{4}\mathrm{arctg}\,x-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{arctg}\,x}{1+x^2}+C$. **143.** $\int x\,\mathrm{arctg}\sqrt{x^2-1}\,dx$. *Resp.* $\frac{1}{2}x^2\,\mathrm{arctg}\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{2}\sqrt{x^2-1}+C$. **144.** $\int \frac{\mathrm{arcsen}\,x}{x^2}\,dx$. *Resp.* $\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right|-\frac{1}{x}\mathrm{arcsen}\,x+C$. **145.** $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})\,dx$. *Resp.* $x\ln|x+\sqrt{1+x^2}|-\sqrt{1+x^2}+C$. **146.** $\int \mathrm{arcsen}\,x\frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$. *Resp.* $\frac{\mathrm{arcsen}\,x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right|$.

Utilizar sustituciones trigonométricas en los ejemplos siguientes:

147. $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}\,dx$. *Resp.* $-\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}-\mathrm{arcsen}\,\frac{x}{a}+C$. **148.** $\int x^2\sqrt{4-x^2}\,dx$. *Resp.* $2\,\mathrm{arcsen}\,\frac{x}{2}-\frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2}+\frac{1}{4}x^3\sqrt{4-x^2}+C$. **149.** $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$. *Resp.* $-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C$. **150.** $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\,dx$. *Resp.* $\sqrt{x^2-a^2}-a\arccos\frac{a}{x}+C$. **151.** $\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2+x^2)^3}}$. *Resp.* $\frac{x}{a^2}\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}+C$.

Integración de las fracciones racionales:

152. $\int \frac{2x-1}{(x-1)(x-2)}\,dx$. *Resp.* $\ln\left|\frac{(x-2)^3}{x-1}\right|+C$. **153.** $\int \frac{x\,dx}{(x+1)(x+3)(x+5)}$. *Resp.* $\frac{1}{8}\ln\frac{(x+3)^6}{(x+5)^5(x+1)}$. **154.** $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}\,dx$. *Resp.* $\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+\ln\left|\frac{x^2(x-2)^5}{(x+2)^3}\right|+C$. **155.** $\int \frac{x^4\,dx}{(x^2-1)(x+2)}$. *Resp.* $\frac{x^2}{2}-2x+\frac{1}{6}\ln\frac{(x-1)}{(x+1)^3}+\frac{16}{3}\ln(x+2)+C$. **156.** $\int \frac{dx}{(x-1)^2(x-2)}$. *Resp.* $\frac{1}{x-1}+\ln\frac{x-2}{x-1}+C$. **157.** $\int \frac{x-8}{x^3-4x^2+4x}\,dx$. *Resp.* $\frac{3}{x-2}+\ln\frac{(x-2)^2}{x^2}+C$. **158.** $\int \frac{3x+2}{x(x+1)^3}\,dx$. *Resp.* $\frac{4x+3}{2(x+1)^2}+\ln\frac{x^2}{(x+1)^2}+C$. **159.** $\int \frac{x^2\,dx}{(x+2)^2(x+4)^2}$. *Resp.* $-\frac{5x+12}{x^2+6x+8}+\ln\left(\frac{x+4}{x+2}\right)^2+C$. **160.** $\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$. *Resp.* $\ln\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+C$. **161.** $\int \frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}\,dx$. *Resp.* $\ln\frac{(x^2-2x+5)^{\frac{3}{2}}}{x-1}+\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\,\frac{x-1}{2}+C$. **162.** $\frac{x^3-6}{x^4+6x^2+8}\,dx$. *Resp.* $\ln\frac{x^2+4}{\mathrm{p}\sqrt{x^2+}}+\frac{3}{2}\mathrm{arctg}\,\frac{x}{2}-\frac{3}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\,\frac{x}{\sqrt{2}}+C$.

163. $\int \frac{dx}{x^3+1}$. *Resp.* $\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$. **164.** $\int \frac{3x-7}{x^3+x^2+4x+4}\,dx$. *Resp.* $\ln\frac{x^2+4}{(x+1)^2}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C$. **165.** $\int \frac{4\,dx}{x^4+1}$. *Resp.* $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+$ $+\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}+C$. **166.** $\int \frac{x^5}{x^3-1}\,dx$. *Resp.* $\frac{1}{3}[x^3+\ln(x^3-1)]+C$.

167. $\int \frac{x^3+x-1}{(x^2+2)^2}\,dx$. *Resp.* $\frac{2-x}{4(x^2+2)}+\ln(x^2+2)^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C$.

168. $\int \frac{(4x^2-8x)\,dx}{(x-1)^2(x^2+1)^2}$. *Resp.* $\frac{3x^2-1}{(x-1)(x^2+1)}+\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+1}+\operatorname{arctg}x+C$.

169. $\int \frac{dx}{(x^2-x)(x^2-x+1)^2}$. *Resp.* $\ln\frac{x-1}{x}-\frac{10}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}-\frac{2x-1}{3(x^2-x+1)}+C$.

Integración de las funciones irracionales **170.** $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+1}\,dx$. *Resp.* $\frac{4}{3}[\sqrt[4]{x^3}-\ln(\sqrt[4]{x^3}+1)]+C$. **171.** $\int \frac{\sqrt{x^3}-\sqrt[3]{x}}{6\sqrt[4]{x}}\,dx$. *Resp.* $\frac{2}{27}\sqrt[4]{x^9}-$ $-\frac{2}{13}\sqrt[12]{x^{13}}+C$. **172.** $\int \frac{\sqrt[6]{x}+1}{\sqrt[6]{x^7}+\sqrt[4]{x^5}}\,dx$. *Resp.* $-\frac{6}{\sqrt[6]{x}}+\frac{12}{\sqrt[12]{x}}+2\ln x-$ $-24\ln(\sqrt[12]{x}+1)+C$. **173.** $\int \frac{2+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[6]{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}+1}\,dx$. *Resp.* $\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}-$ $-\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+4\sqrt{x}-6\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-9\ln(\sqrt[6]{x}+1)+\frac{3}{2}\ln(\sqrt[6]{x^2}+1)+$ $+3\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}+C$. **174.** $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{x^2}$ *Resp.* $\ln\left|\frac{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}\right|-$ $-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+C$. **175.** $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{x}$. *Resp.* $2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+$ $+\ln\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}\sqrt{1-x}}+C$. **176.** $\int \frac{\sqrt[7]{x}+\sqrt{x}}{\sqrt[7]{x^8}+\sqrt[14]{x^{15}}}\,dx$. *Resp.* $14\left[\sqrt[14]{x}-\right.$ $\left.-\frac{1}{2}\sqrt[7]{x}+\frac{1}{3}\sqrt[14]{x^3}-\frac{1}{4}\sqrt[7]{x^2}+\frac{1}{5}\sqrt[14]{x^5}\right]+C$. **177.** $\int \sqrt{\frac{2+3x}{x-3}}\,dx$. *Resp.* $\sqrt{3x^2-7x-6}+\frac{11}{2\sqrt{3}}\ln\left(x-\frac{7}{6}+\sqrt{x^2-\frac{7}{3}x-2}\right)+C$. Integrales del tipo $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$: **178.** $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-x+3}}$. *Resp.* $\frac{1}{\sqrt{3}}\times$ $\times\ln\left|\frac{\sqrt{x^2-x+3}-\sqrt{3}}{x}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\right|+C$. **179.** $\int \frac{dx}{x\sqrt{2+x-x^2}}$. *Resp.* $-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2+x-x^2}+\sqrt{2}}{x}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\right|+C$. **180.** $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4x-4}}$. *Resp.*

$\frac{1}{2}\operatorname{arcsen}\frac{x-2}{x\sqrt{2}}+C$. **181.** $\int\frac{\sqrt{x^2+2x}}{x}\,dx$. *Resp.* $\sqrt{x^2+2x}+\ln|x+1+$ $+\sqrt{x^2+2x}\,|+C$. **182.** $\int\frac{dx}{\sqrt{(2x-x^2)^3}}$. *Resp.* $\frac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}}+C$.

183. $\int\sqrt{2x-x^2}\,dx$. *Resp.* $\frac{1}{2}[(x-1)\sqrt{2x-x^2}+\operatorname{arcsen}(x-1)]+C$.

184. $\int\frac{dx}{x-\sqrt{x^2-1}}$. *Resp.* $\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-1}\,|+C$.

185. $\int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x+x^2}}$. *Resp.* $\ln\left|\frac{x+\sqrt{1+x+x^2}}{2+x+\sqrt{1+x+x^2}}\right|+C$.

186. $\int\frac{x+1}{(2x+x^2)\sqrt{2x+x^2}}\,dx$. *Resp.* $-\frac{1}{\sqrt{2x+x^2}}+C$. **187.** $\int\frac{1-\sqrt{1+x+x^2}}{x\sqrt{1+x+x^2}}\,dx$. *Resp.* $\ln\left|\frac{2+x-2\sqrt{1+x+x^2}}{x^2}\right|+C$. **188.** $\int\frac{\sqrt{x^2+4x}}{x^2}\,dx$. *Resp.* $-\frac{8}{x+\sqrt{x^2+4x}}+\ln|x+2+\sqrt{x^2+4x}\,|+C$.

Integración de los binomios diferenciales:

189. $\int\frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$. *Resp.* $2\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}+C$. **190.** $\int x^{\frac{1}{3}}\left(2+x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{4}}dx$. *Resp.* $\frac{10x^{\frac{2}{3}}-16}{15}\left(2+x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{5}{4}}+C$. **191.** $\int\frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$. *Resp.* $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C$. **192.** $\int\frac{dx}{x^2(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$. *Resp.* $-(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\left(2x+\frac{1}{x}\right)+C$. **193.** $\int\sqrt[4]{\left(1+x^{\frac{1}{2}}\right)^3}\,dx$. *Resp.* $\frac{8}{77}(7\sqrt{x}-4)(1+\sqrt{x})^{\frac{7}{4}}+C$. **194.** $\int\frac{\sqrt{2-\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x}}\,dx$. *Resp.* $\frac{2(4+3\sqrt[3]{x})(2-\sqrt[3]{x})^{\frac{3}{2}}}{5}$.

195. $\int x^5\sqrt[3]{(1+x^3)^2}\,dx$. *Resp.* $\frac{5x^3-3}{40}(1+x^3)^{\frac{5}{3}}$.

Integración de las funciones trigonométricas:

196. $\int\operatorname{sen}^3x\,dx$. *Resp.* $\frac{1}{3}\cos^3x-\cos x+C$. **197.** $\int\operatorname{sen}^5x\,dx$. *Resp.* $-\cos x+$ $+\frac{2}{3}\cos^3x-\frac{\cos^5x}{5}+C$. **198.** $\int\cos^4x\operatorname{sen}^3x\,dx$. *Resp.* $-\frac{1}{5}\cos^5x+\frac{1}{7}\cos^7x+C$.

199. $\int\frac{\cos^3x}{\operatorname{sen}^4x}\,dx$. *Resp.* $\csc x-\frac{1}{3}\csc^3x+C$. **200.** $\int\cos^2x\,dx$. *Resp.* $\frac{x}{2}+$ $+\frac{1}{4}\operatorname{sen}2x+C$. **201.** $\int\operatorname{sen}^4x\,dx$. *Resp.* $\frac{3}{8}x-\frac{\operatorname{sen}2x}{4}+\frac{\operatorname{sen}4x}{32}+C$.

202. $\int\cos^6x\,dx$. *Resp.* $\frac{1}{16}\left(5x+4\operatorname{sen}2x-\frac{\operatorname{sen}^3 2x}{3}+\frac{3}{4}\operatorname{sen}4x\right)+C$.

203. $\int \operatorname{sen}^4 x \cos^4 x\,dx$. *Resp.* $\frac{1}{128}\left(3x-\operatorname{sen} 4x+\frac{\operatorname{sen} 8x}{8}\right)+C$. **204.** $\int \operatorname{tg}^3 x\,dx$. *Resp.* $\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2}+\ln|\cos x|+C$. **205.** $\int \operatorname{cotg}^5 x\,dx$. *Resp.* $-\frac{1}{4}\operatorname{cotg}^4 x+\frac{1}{2}\operatorname{cotg}^2 x+ +\ln|\operatorname{sen} x|+C$. **206.** $\int \operatorname{cotg}^3 x\,dx$. *Resp.* $-\frac{\operatorname{cotg}^2 x}{2}-\ln|\operatorname{sen} x|+C$. **207.** $\int \operatorname{sc}^3 x\,dx$. *Resp.* $\frac{\operatorname{tg}^7 x}{7}+\frac{3\operatorname{tg}^5 x}{5}+\operatorname{tg}^3 x+\operatorname{tg} x+C$. **208.** $\int \operatorname{tg}^4 x \operatorname{sc}^4 x\,dx$. *Resp.* $\frac{\operatorname{tg}^7 x}{7}+\frac{\operatorname{tg}^5 x}{5}+C$. **209.** $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$. *Resp.* $\operatorname{tg} x+\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x+C$. **210.** $\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}dx$. *Resp.* $C-\csc x$. **211.** $\int \frac{\operatorname{sen}^3 x\,dx}{\sqrt[3]{\cos^4 x}}$. *Resp.* $\frac{3}{5}\cos^{\frac{5}{3}} x+3\cos^{-\frac{1}{3}} x+C$. **212.** $\int \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 3x\,dx$. *Resp.* $-\frac{\operatorname{sen} 4x}{8}+\frac{\operatorname{sen} 2x}{4}+C$. **213.** $\int \cos 4x \cos 7x\,dx$. *Resp.* $\frac{\operatorname{sen} 11x}{22}+\frac{\operatorname{sen} 3x}{6}+C$. **214.** $\int \cos 2x \operatorname{sen} 4x\,dx$. *Resp.* $-\frac{\cos 6x}{12}-\frac{\cos 2x}{4}+C$. **215.** $\int \operatorname{sen}\frac{1}{4}x\cos\frac{3}{4}x\,dx$. *Resp.* $-\frac{\cos x}{2}+\cos\frac{1}{2}x+C$. **216.** $\int \frac{dx}{4-5\operatorname{sen} x}$. *Resp.* $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-2}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}\right|+C$. **217.** $\int \frac{dx}{5-3\cos x}$. *Resp.* $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left|2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C$. **218.** $\int \frac{\operatorname{sen} x\,dx}{1+\operatorname{sen} x}$. *Resp.* $\frac{2}{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}+x+C$. **219.** $\int \frac{\cos x\,dx}{1+\cos x}$. *Resp.* $x-\operatorname{tg}\frac{x}{2}+C$. **220.** $\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{\cos^4 x+\operatorname{sen}^4 x}dx$. *Resp.* $\operatorname{arctg}(2\operatorname{sen}^2 x-1)+C$. **221.** $\int \frac{dx}{(1+\cos x)^2}$. *Resp.* $\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{6}\operatorname{tg}^3\frac{x}{2}+C$. **222.** $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x+\operatorname{tg}^2 x}$. *Resp.* $-\frac{1}{2}\left[\operatorname{cotg} x+\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right)\right]+C$. **223.** $\int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1+\cos^2 x}dx$. *Resp.* $\sqrt{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right)-x+C$.

CAPITULO XI

INTEGRAL DEFINIDA

§ 1. PLANTEO DEL PROBLEMA. SUMAS INTEGRALES INFERIOR Y SUPERIOR

Un medio potente de investigación en las matemáticas, física, mecánica y otras ramas de la ciencia es la **integral definida**, uno de los conceptos fundamentales del análisis matemático. El cálculo

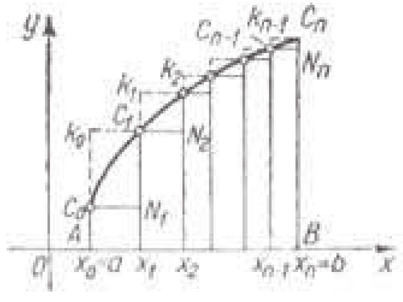

Fig. 206

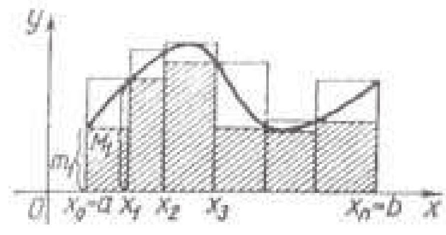

Fig. 207

de las áreas limitadas por las curvas, de las longitudes de arcos, volúmenes, trabajo, velocidad, espacio, momentos de inercia, etc., se reduce al cálculo de una integral definida.

Sea $y = f(x)$ una función **continua** dada sobre el segmento $[a, b]$ (figs. 206 y 207). Designemos por m y M sus valores mínimo y máximo respectivamente en este segmento. Dividamos mediante los puntos el segmento $[a, b]$ en n partes

$$a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n = b,$$

en este caso,

$$x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n,$$

y pongamos:

$$x_1 - x_0 = \Delta x_1, x_2 - x_1 = \Delta x_2, \ldots, x_n - x_{n-1} = \Delta x_n.$$

Designemos ahora los valores mínimo y máximo de la función $f(x)$

en el segmento $[x_0, x_1]$, por m_1 y M_1,
en el segmento $[x_1, x_2]$, por m_2 y M_2,
. . . .
en el segmento $[x_{n-1}, x_n]$, por m_n y M_n respectivamente.

Formemos las sumas:

$$\underline{s}_n = m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + \ldots + m_n \Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i, \qquad (1)$$

$$\overline{s}_n = M_1 \Delta x_1 + M_2 \Delta x_2 + \ldots + M_n \Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i. \qquad (2)$$

$\underline{s}_n$ se llama *suma integral inferior* y $\overline{s}_n$, *suma integral superior*.

Si $f(x) \geqslant 0$, la suma integral inferior es numéricamente igual al área de la «figura escalonada inscrita» $AC_0N_1C_1N_2 \ldots C_{n-1}N_nBA$, limitada por una línea quebrada «inscrita». La suma integral superior es numéricamente igual al área de la «figura escalonada cir-

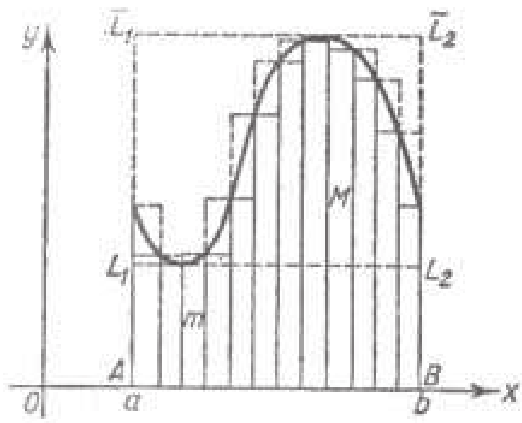

Fig. 208

cunscrita» $AK_0C_1K_1 \ldots C_{n-1}K_{n-1}C_nBA$, limitada por una línea quebrada «circunscrita».

Analicemos algunas propiedades de las sumas integrales, superiores e inferiores.

a) Dado que $m_i \leqslant M_i$ para cualquier i ($i = 1, 2, \ldots, n$), en virtud de las fórmulas (1) y (2) tenemos:

$$\underline{s}_n \leqslant \overline{s}_n.$$

(El signo de igualdad sólo corresponde al caso en que $f(x) = \text{const}$).

b) Dado que

$$m_1 \geqslant m, \; m_2 \geqslant m, \; \ldots, \; m_n \geqslant m,$$

donde m es el valor mínimo de $f(x)$ en el segmento $[a, b]$, tenemos:

$$\underline{s}_n = m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + \ldots + m_n \Delta x_n \geqslant m \Delta x_1 + m \Delta x_2 + \ldots$$
$$\ldots + m \Delta x_n = m (\Delta x_1 + \Delta x_2 + \ldots + \Delta x_n) = m (b - a).$$

Así:

$$\underline{s}_n \geqslant m (b - a)$$

c) Dado que

$$M_1 \leqslant M,\ M_2 \leqslant M,\ \ldots,\ M_n \leqslant M,$$

donde M es el valor máximo de $f(x)$ en el segmento $[a, b]$, tenemos:

$$\bar{s}_n = M_1\,\Delta x_1 + M_2\,\Delta x_2 + \ldots + M_n\,\Delta x_n \leqslant M\,\Delta x_1 + M\,\Delta x_2 + \ldots$$
$$\ldots + M\,\Delta x_n = M\,(\Delta x_1 + \Delta x_2 + \ldots + \Delta x_n) = M\,(b-a).$$

Así:

$$\bar{s}_n \leqslant M\,(b-a).$$

Uniendo dos desigualdades obtenidas, tenemos:

$$m\,(b-a) \leqslant \underline{s}_n \leqslant \bar{s}_n \leqslant M\,(b-a).$$

Si $f(x) \geqslant 0$, la última desigualdad tiene una interpretación geométrica simple (fig. 208), puesto que los productos $m\,(b-a)$ y $M\,(b-a)$ son numéricamente iguales a las áreas respectivas del rectángulo «inscrito» AL_1L_2B y del «circunscrito» $A\overline{L}_1\overline{L}_2B$.

§ 2. INTEGRAL DEFINIDA

Continuemos el examen del problema del párrafo anterior. En cada uno de los segmentos $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ..., $[x_{n-1}, x_n]$ elijamos un punto que designamos respectivamente por $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$

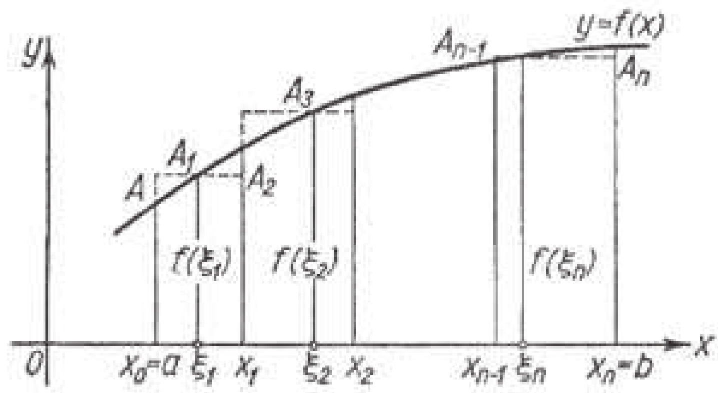

Fig. 209

(fig. 209):

$$x_0 < \xi_1 < x_1,\ x_1 < \xi_2 < x_2,\ \ldots,\ x_{n-1} < \xi_n < x_n.$$

En cada uno de estos puntos calculemos el valor de la función $f(\xi_1)$, $f(\xi_2)$, ..., $f(\xi_n)$ y formemos la suma:

$$s_n = f(\xi_1)\,\Delta x_1 + f(\xi_2)\,\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\,\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i, \qquad (1)$$

y todos los $\Delta x_i > 0$, entonces,

$$m_i \Delta x_i \leqslant f(\xi_i)\,\Delta x_i \leqslant M_i \Delta x_i.$$

Por consiguiente,

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\,\Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} M_i\,\Delta x_i$$

ó

$$\underline{s}_n \leqslant s_n \leqslant \overline{s}_n. \tag{2}$$

La interpretación geométrica de la última desigualdad es que, para $f(x) \geqslant 0$, la figura cuya área es igual a s_n, está limitada por una línea quebrada, comprendida entre las líneas quebradas «inscrita» y «circunscrita».

La suma s_n depende del modo de dividir el segmento $[a, b]$ en los segmentos $[x_{i-1}, x_i]$, así como de la elección de los puntos ξ_i dentro de estos segmentos.

Designemos por máx $[x_{n-1}, x_i]$ la mayor longitud de los segmentos $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, . . ., $[x_{n-1}, x_n]$. Examinemos diferentes divisiones del segmento $[a, b]$ en los segmentos $[x_{i-1}, x_i]$ tales que máx $[x_{i-1}, x_i] \to 0$.

Es evidente que, en el proceso de división, el número n de segmentos tiende al infinito. Eligiendo los valores correspondientes de ξ_i, se puede formar, para cada división, la suma integral

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i,$$

de modo que se puede hablar de la división sucesiva y la secuencia respectiva de las sumas integrales. Supongamos que, para una sucesión de divisiones eligida, cuando máx $\Delta x_i \to 0$, esta suma*) tiende a un límite I.

Si para las divisiones arbitrarias del segmento $[a, b]$, tales que máx $\Delta x_i \to 0$, y la elección cualquiera de los puntos ξ_i, la suma $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i$ tiende a un mismo límite I, se dice que la función $f(x)$, que es un integrando, es *integrable* en el segmento $[a, b]$; el límite I se llama *integral definida* de la función $f(x)$ en el segmento $[a, b]$ y se designa por: $\int_a^b f(x)\,dx$. Entonces podemos escribir:

$$\lim_{\text{máx}\,\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx.$$

* En el caso dado, la suma es una magnitud variable ordenada.

Los números a y b se llaman, respectivamente, *límite inferior* y *superior* de la integral. El segmento $[a, b]$ se llama *segmento de integración*, la letra x, *variable de integración*.

Notemos sin demostración que *si la función $y = f(x)$ es continua en el segmento $[a, b]$, es integrable en el mismo segmento.*

Si para cierta sucesión de las divisiones, tales que máx $\Delta x_i \to 0$ estudiamos la secuencia de las sumas integrales inferiores $\underline{s}_n$ y las sumas integrales superiores $\overline{s}_n$ para una función continua $f(x)$, es evidente que estas sumas tenderán a un mismo límite I, es decir, a la integral definida de la función $f(x)$:

$$\lim_{\text{máx } \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = \int_a^b f(x)\, dx,$$

$$\lim_{\text{máx } \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Entre las funciones discontinuas hay funciones integrables y no integrables.

Si construimos la gráfica del integrando $y = f(x)$ entonces, en el caso de $f(x) \geqslant 0$, la integral

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

será numéricamente igual al área de así llamado *trapecio curvilíneo* formado por la curva $y = f(x)$, las rectas $x = a$, $x = b$ y el eje Ox (fig. 210).

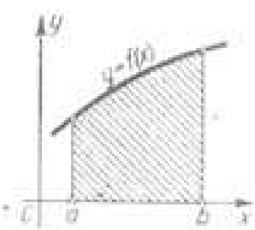

Fig. 210

Por consiguiente, el área Q de un trapecio curvilíneo comprendida entre la curva $y = f(x)$, las rectas $x = a$, $x = b$ y el eje Ox se calcula mediante la integral

$$Q = \int_a^b f(x)\, dx. \qquad (3)$$

Observación 1. Notemos que la integral definida depende sólo de la forma de la función $f(x)$ y de los límites de integración, pero no depende de la variable de integración. Esta última puede designarse por cualquiera letra. Por eso se puede, sin cambiar el valor de la integral definida sustituir la letra x por cualquiera otra.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \ldots = \int_a^b f(z)\,dz.$$

Al introducir el concepto de la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ hemos supuesto que $a < b$. Si $b < a$, según la definición tenemos:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx. \tag{4}$$

Así, por ejemplo,

$$\int_5^0 x^2\,dx = -\int_0^5 x^2\,dx.$$

Finalmente, si $a = b$, según la definición, para toda función $f(x)$ tenemos:

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0. \tag{5}$$

Esto es natural también desde el punto de vista geométrico. En efecto, la longitud de la base del trapecio curvilíneo es cero, por tanto, su área también es igual a cero.

Ejemplo 1. Hallar la integral $\int_a^b kx\,dx$ $(b > a)$.

Solución. Desde el punto de vista geométrico el problema se reduce al cálculo del área Q de un trapecio, comprendida entre las líneas $y = kx$, $x = a$, $x = b$, $y = 0$ (fig. 211).

Fig. 211

La función $y = kx$, que se halla bajo el signo de integral, es continua. Por consiguiente, para calcular la integral definida se puede, como hemos indicado más arriba, dividir arbitrariamente el segmento $[a, b]$ y elegir cualesquiera puntos intermedios ξ_k. El resultado del cálculo de la integral definida no depende del método de formación de la suma integral; siendo que el paso de la división tienda al cero.

Dividamos el segmento $[a, b]$ en n partes iguales. La longitud Δx de cada segmento parcial es igual a:

$\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Este número se llama «paso» de la división. Las coordenadas de los puntos de división son:

$$a = x_0,\ x_1 = a + \Delta x,$$
$$x_2 = a + 2\Delta x,\ \ldots,\ x_n = a + n\Delta x.$$

Como puntos ξ_k tomemos los extremos izquierdos de cada segmento:

$$\xi_1 = a,\ \xi_2 = a + \Delta x,\ \ \xi_3 = a + 2\Delta x,\ \ldots,\ \ \xi_n = a + (n-1)\Delta x.$$

Formemos la suma integral (1). Siendo $f(\xi_i) = k\xi_i$, tenemos:

$$s_n = k\xi_1\Delta x + k\xi_2\Delta x + \ldots + k\xi_n\Delta x = ka\Delta x + [k(a+\Delta x)]\Delta x + \ldots +$$
$$+ \{k[a+(n-1)\Delta x]\}\Delta x = k\{a + (a+\Delta x) + (a+2\Delta x) + \ldots +$$
$$+ [a+(n-1)\Delta x]\}\Delta x = k\{na + [\Delta x + 2\Delta x + \ldots + (n-1)\Delta x]\}\Delta x =$$
$$= k\{na + [1+2+\ldots+(n-1)]\Delta x\}\Delta x,$$

donde $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Teniendo en cuenta que

$$1+2+\ldots+(n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

(como suma de una progresión aritmética), tenemos:

$$s_n = k\left[na + \frac{n(n-1)}{2}\,\frac{b-a}{n}\right]\frac{b-a}{n} = k\left[a + \frac{n-1}{n}\,\frac{b-a}{2}\right](b-a).$$

Puesto que:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n} = 1,$$

entonces:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = Q = k\left[a + \frac{b-a}{2}\right](b-a) = k\,\frac{b^2-a^2}{2}.$$

Así,

$$\int_a^b kx\,dx = k\frac{b^2-a^2}{2}.$$

Es fácil calcular el área *ABba* (fig. 211), usando los métodos de la geometría elemental. El resultado será el mismo.

Ejemplo 2. Calcular $\int_0^b x^2\,dx$.

Solución. La integral dada es igual al área Q del trapecio curvilíneo limitado por la parábola $y = x^2$, la ordenada $x = b$ y la recta $y = 0$ (fig. 212).

Dividamos el segmento $[a, b]$ en n partes iguales por medio de los puntos:

$$x_0 = 0,\ x_1 = \Delta x,\ x_2 = 2\Delta x,\ \ldots,\ x_n = b = n\Delta x,$$
$$\Delta x = \frac{b}{n}.$$

Como los puntos ξ_i tomemos los extremos derechos de cada segmento.

Formemos la suma integral

$$s_n = x_1^2\Delta x + x_2^2\Delta x + \ldots + x_n^2\Delta x =$$
$$= [(\Delta x)^2\,\Delta x + (2\Delta x)^2\,\Delta x + \ldots + (n\Delta x)^2\,\Delta x] = (\Delta x)^3\,[1^2 + 2^2 + \ldots + n^2].$$

Como es sabido:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

por esto:

$$s_n = \frac{b^3}{n^3}\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{b^3}{6}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right);$$

$$\lim_{n\to\infty} s_n = Q = \int_0^b x^2\,dx = \frac{b^3}{3}.$$

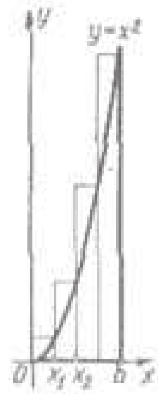

Fig. 212

Ejemplo 3. Calcular $\int_a^b m\,dx$ $(m = \text{const})$.

Solución

$$\int_a^b m\,dx = \lim_{\text{máx}\,\Delta x_i\to 0} \sum_{i=1}^{n} m\Delta x_i = \lim_{\text{máx}\,\Delta x_i\to 0} m \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i =$$
$$= m \lim_{\text{máx}\,\Delta x_i\to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = m\,(b-a).$$

Aquí, $\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i$ es la suma de las longitudes de los segmentos parciales que componen el segmento $[a, b]$.

Cualquiera que sea el modo de la división, esta suma es igual a la longitud del segmento $b - a$.

Ejemplo 4. Calcular $\int_a^b e^x\,dx$.

Solución. Dividamos de nuevo el segmento $[a, b]$ en n partes iguales:

$$x_0=a,\ x_1=a+\Delta x,\ \ldots,\ x_n=a+n\Delta x;\ \Delta x=\frac{b-a}{n}.$$

Como puntos ξ tomemos los extremos izquierdos. Formemos la suma integral

$$S_n=e^a\Delta x+e^{a+\Delta x}\Delta x+\ldots+e^{a+(n-1)\Delta x}\Delta x=$$
$$=e^a\left(1+e^{\Delta x}+e^{2\Delta x}+\ldots+e^{(n-1)\Delta x}\right)\Delta x.$$

La expresión comprendida entre paréntesis es una progresión geométrica cuya razón es $e^{\Delta x}$, y el primer término igual a 1; por esto:

$$S_n=e^a\frac{e^{n\Delta x}-1}{e^{\Delta x}-1}\Delta x=e^a\left(e^{n\Delta x}-1\right)\frac{\Delta x}{e^{\Delta x}-1}.$$

Luego tenemos:

$$n\Delta x=b-a;\ \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{e^{\Delta x}-1}=1.$$

Según la regla de l'Hospital

$$\lim_{z=0}\frac{z}{e^z-1}=\lim_{z=0}\frac{1}{e^z}=1.$$

Así, $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=Q=e^a\left(e^{b-a}-1\right)\cdot 1=e^b-e^a$, es decir: $\int_a^b e^x\,dx=e^b-e^a$.

Observación 2. Los ejemplos examinados muestran que el cálculo directo de las integrales definidas como límites de sumas integrales presenta grandes dificultades. Incluso, en los casos en que los integrandos son muy simples (kx, x^2, e^x), este método requiere cálculos laboriosos. El cálculo de las integrales definidas de las funciones complicadas es aún más difícil. Es natural que surge el problema de encontrar un método cómodo para el cálculo de las integrales definidas. Este método, descubierto por Newton y Leibniz, utiliza la relación lógica que existe entre la integración y la derivación.

Los párrafos ulteriores del presente capítulo se dedican a la exposición y argumentación del método mencionado.

§ 3. PROPIEDADES FUNDAMENTALES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

Propiedad 1. El *factor constante se puede sacar fuera del signo de la integral definida: si $A =$ const,*

$$\int_a^b Af(x)\,dx = A\int_a^b f(x)\,dx \tag{1}$$

Demostración.

$$\int_a^b Af(x)\,dx = \lim_{\text{máx}\,\Delta x \to 0}\sum_{i=1}^{n} Af(\xi_i)\,\Delta x_i =$$

$$= A\lim_{\text{máx}\,\Delta x \to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i = A\int_a^b f(x)\,dx.$$

Propiedad 2. La *integral definida de la suma algebraica de varias funciones es igual a la suma algebraica de las integrales de los sumandos.* Por ejemplo, en el caso de dos sumandos:

$$\int_a^b [f_1(x) + f_2(x)]\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx. \tag{2}$$

Demostracion.

$$\int_a^b [f_1(x) + f_2(x)]\,dx = \lim_{\text{máx}\,\Delta x \to 0}\sum_{i=1}^{n} [f_1(\xi_i) + f_2(\xi_i)]\,\Delta x_i =$$

$$= \lim_{\text{máx}\,\Delta x \to 0}\left[\sum_{i=1}^{n} f_1(\xi_i)\,\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} f_2(\xi_i)\,\Delta x_i\right] =$$

$$= \lim_{\text{máx}\,\Delta x \to 0}\sum_{i=1}^{n} f_1(\xi_i)\,\Delta x_i +$$

$$+ \lim_{\text{máx}\,\Delta x \to 0}\sum_{i=1}^{n} f_2(\xi_i)\,\Delta x_i =$$

$$= \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx.$$

La demostración es válida para cualquier número de sumandos.

Las propiedades 1 y 2 demostradas para el caso en que $a < b$, son válidas también para el caso en que $a \geqslant b$.

Sin embargo, la propiedad siguiente es válida sólo cuando $a < b$.

Propiedad 3. Si *en el segmento $[a, b]$, donde $a < b$, las funciones $f(x)$ y $\varphi(x)$ satisfacen a la condición $f(x) \leqslant \varphi(x)$, entonces:*

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b \varphi(x)\,dx. \tag{3}$$

Demostración. Examinemos la diferencia

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b [\varphi(x) - f(x)]\,dx =$$

$$= \lim_{\text{máx}\,\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} [\varphi(\xi_i) - f(\xi_i)]\,\Delta x_i.$$

Aquí, cada diferencia $\varphi(\xi_i) - f(\xi_i) \geqslant 0$, $\Delta x_i \geqslant 0$. Por consiguiente, cada sumando de la suma no es negativo, igual que no es negativa toda la suma ni su límite, es decir,

$$\int_a^b [\varphi(x) - f(x)]\,dx \geqslant 0$$

ó

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0,$$

de donde se deduce la desigualdad (3).

Si $f(x) > 0$ y $\varphi(x) > 0$, la figura 213 da una ilustración geométrica de esta propiedad. Puesto que $\varphi(x) \geqslant f(x)$, el área del trapecio curvilíneo aA_1B_1b no es mayor que el área del trapecio curvilíneo aA_2B_2b.

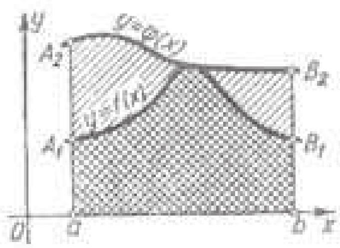

Fig. 213

Propiedad 4. *Si m y M son los valores mínimo y máximo respectivamente de la función $f(x)$ en el segmento $[a, b]$ y $a \leqslant b$, entonces:*

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a). \tag{4}$$

Demostración. Según la hipótesis,

$$m \leqslant f(x) \leqslant M.$$

En virtud de la propiedad (3), tenemos:

$$\int_a^b m\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b M\,dx. \tag{4'}$$

Pero

$$\int_a^b m\,dx = m\,(b-a), \quad \int_a^b M\,dx = M\cdot(b-a)$$

(véase el ejemplo 3, § 2, cap. XI). Sustituyendo estas expresiones en la desigualdad (4′) obtenemos la desigualdad (4).

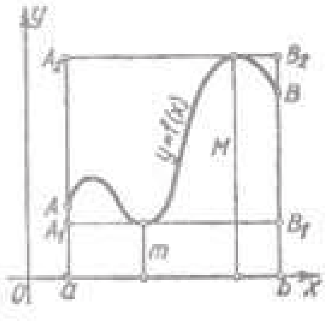

Fig. 214

Cuando $f(x) \geqslant 0$, la propiedad 4 se ilustra geométricamente en la fig. 214: el área del trapecio curvilíneo $aABb$ está comprendida entre las áreas de los rectángulos aA_1B_1b y aA_2B_2b.

Propiedad 5. (Teorema de la media)

Si la función $f(x)$ es continua en el segmento $[a, b]$, existe en este segmento un punto ξ tal que se verifique la igualdad siguiente:

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,f(\xi)\,. \tag{5}$$

Demostración. Para precisar supongamos que $a < b$. Si m y M son valores mínimo y máximo, respectivamente, de la $f(x)$ en el segmento $[a, b]$, en virtud de la fórmula (4) tenemos:

$$m \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leqslant M.$$

De aquí:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \mu, \text{ donde } m \leqslant \mu \leqslant M.$$

Puesto que $f(x)$ es continua, esta función toma todos los valores intermedios comprendidos entre m y M. Por tanto, para cierto valor ξ $(a \leqslant \xi \leqslant b)$ será $\mu = f(\xi)$, es decir,

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)\,(b-a).$$

Propiedad 6. *Para tres números arbitrarios a, b, c se verifica la igualdad:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx, \tag{6}$$

siempre que *estas tres integrales existen.*

Demostración. Supongamos al principio que $a < c < b$, y formemos la suma integral para la función $f(x)$ en el segmento $[a, b]$.

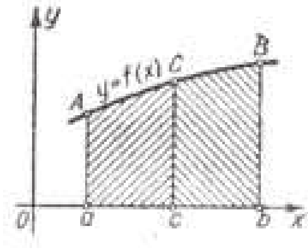

Fig. 215

Puesto que el límite de la suma integral no depende del modo de dividir el segmento $[a, b]$ en partes, lo dividimos en segmentos pequeños de tal manera que c sea el punto de división. Descompongamos luego la suma integral $\sum\limits_a^b$ correspondiente al segmento $[a, b]$ en dos sumas: una $\sum\limits_a^c$, que corresponde al segmento $[a, c]$ y la otra $\sum\limits_c^b$ que es correspondiente al segmento $[c, b]$.

Entonces:

$$\sum_a^b f(\xi_i)\,\Delta x_i = \sum_a^c f(\xi_i)\,\Delta x_i + \sum_c^b f(\xi_i)\,\Delta x_i.$$

Tomando límites (en la última ecuación) para máx $\Delta x_i \to 0$ obtenemos la correlación (6).

Si $a < b < c$, en virtud de lo demostrado podemos escribir:

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

ó

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx.$$

Pero, de acuerdo con la fórmula (4), § 2 tenemos:

$$\int_b^c f(x)\,dx = -\int_c^b f(x)\,dx.$$

Por esto:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

De modo análogo se demuestra la propiedad 6 para cualquiera otra disposición de los puntos a, b y c.

La figura 215 ilustra geométricamente la propiedad 6 para el caso en que $f(x) > 0$, y $a < c < b$: el área del trapecio $aABb$ es igual a la suma de las áreas de los trapecios $aACc$ y $cCBb$.

§ 4. CALCULO DE LA INTEGRAL DEFINIDA. FORMULA DE NEWTON-LEIBNIZ

Supongamos que en la integral definida

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

el límite inferior a está fijado, mientras que el superior b varía. Es evidente que variará también el valor de la integral, es decir, la integral será una función de su límite superior.

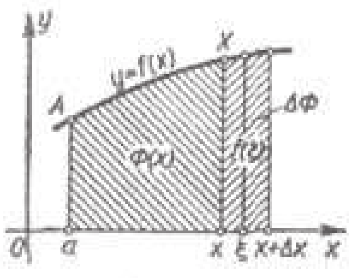

Fig. 216

Para utilizar las designaciones habituales, designemos el límite superior por x y para evitar toda confusión designemos la variable de integración por t (el valor de la integral no depende de la designación de la variable de integración). Obtenemos la integral $\int_a^x f(t)\,dt$. Siendo a constante, la integral será una función de su límite superior x. Designemos esta función por $\Phi(x)$:

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt. \qquad (1)$$

Si $f(t)$ es una función no negativa, el valor de $\Phi(x)$ será numéricamente igual al área del trapecio curvilíneo $aAXx$ (fig. 216). Evidentemente, este área varía en función del cambio de x. Hallemos la derivada de $\Phi(x)$ respecto a x, es decir, la derivada de la integral definida (1) respecto a su límite superior.

Teorema 1. *Si $f(x)$ es una función continua y $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, se verifica la igualdad*

$$\Phi'(x) = f(x).$$

En otras palabras, *la derivada de una integral definida respecto a su límite superior es igual al integrando en el que la variable de integración está sustituida por el valor del límite superior* (a condición de que el integrando sea continuo).

Demostración. Demos al argumento x un incremento arbitrario Δx, positivo o negativo; entonces, tomando en consideración la propiedad 6 de la integral definida, obtenemos.

$$\Phi(x+\Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt.$$

El incremento de la función $\Phi(x)$ es igual a

$$\Delta\Phi = \Phi(x+\Delta x) - \Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt,$$

es decir,

$$\Delta\Phi = \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt.$$

Apliquemos a esta integral el teorema de la media (propiedad 5 de la integral definida):

$$\Delta\Phi = f(\xi)(x+\Delta x - x) = f(\xi)\,\Delta x,$$

donde ξ se halla comprendido entre x y $x+\Delta x$.

Hallemos la razón del incremento de la función al incremento del argumento:

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = \frac{f(\xi)\,\Delta x}{\Delta x} = f(\xi).$$

Por tanto,

$$\Phi'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(\xi).$$

Pero, puesto que $\xi \to x$ cuando $\Delta x \to 0$, entonces:

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(\xi) = \lim_{\xi \to x} f(\xi)$$

y, como la función $f(x)$ es continua:

$$\lim_{\xi \to x} f(\xi) = f(x).$$

Así pues, $\Phi'(x) = f(x)$. El teorema está demostrado. El teorema dado se ilustra geométricamente de manera muy simple (fig. 216): el incremento $\Delta\Phi = f(\xi)\,\Delta x$ es igual al área del trapecio curvilíneo de base Δx; y la derivada $\Phi'(x) = f(x)$ es igual a la longitud del segmento xX.

Observación. Del teorema demostrado se deduce, en particular, que *cada función continua tiene una función primitiva.* En efecto, si la función $f(t)$ es continua en el segmento $[a, x]$ entonces, según lo indicado en el § 2, cap. XI, existe la integral definida $\int_a^x f(t)\,dt$, es decir, existe la función

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt,$$

que es, en virtud de lo demostrado, la función primitiva de $f(x)$.

Teorema 2. *Si $F(x)$ es una función primitiva de la función continua $f(x)$, la fórmula*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \tag{2}$$

es válida.

Esta fórmula se llama *fórmula de Newton-Leibniz**).

Demostración. Sea $F(x)$ una función primitiva de $f(x)$. Según el teorema (1), la función $\int_a^x f(t)\,dt$ es también primitiva de $f(x)$. Pero dos primitivas arbitrarias de la función dada se diferencian por un sumando constante C^*

Por tanto, se puede escribir:

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) + C^*. \tag{3}$$

---

*) Notemos que tal denominación de la formula (2) es convencional, puesto que ni Newton ni Leibniz dieron exactamente esta fórmula. Pero lo importante es que precisamente ellos establecieron por primera vez la relación entre la integración y la derivación, que permitió enunciar una regla de cálculo de las integrales definidas.

Con la elección correspondiente de C^*, esta igualdad es válida para todos los valores de x, o sea, es una identidad. Para determinar la constante C^* hagamos $x = a$; entonces:

$$\int_a^a f(t)\,dt = F(a) + C^*,$$

ó

$$0 = F(a) + C^*,$$

de donde:

$$C^* = -F(a).$$

Por consiguiente,

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a).$$

Haciendo $x = b$, obtenemos la fórmula de Newton — Leibniz:

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$$

o, al sustituir la variable de integración por x:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Notemos que la diferencia $F(b) - F(a)$ no depende de la elección de la función primitiva F, puesto que todas las primitivas se diferencian en una magnitud constante, la que desaparece durante la sustracción.

Si introducimos la designación*).

$$F(b) - F(a) = F(x)\,|_a^b,$$

se puede escribir la fórmula (2) en la forma:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\,|_a^b = F(b) - F(a).$$

---

*) La expresión $\Big|_a^b$ se llama símbolo de la sustitución doble. En los manuales de matemáticas se utilizan dos formas equivalentes de notación:

$$F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b,$$

ó

$$F(b) - F(a) = F(x)\,\Big|_a^b.$$

En adelante utilizaremos ambas formas de notación.

La fórmula de Newton-Leibniz propone un método muy práctico para el cálculo de integrales definidas cuando se conoce la función primitiva del integrando. Exactamente, el descubrimiento de esta fórmula le dio a la integral definida la importancia que ésta tiene hoy día en las matemáticas.
Aunque las operaciones análogas al cálculo de la integral definida como límite de una suma integral, fueron conocidas incluso en la antigüedad (Arquímedes), las aplicaciones de este método se limitaban sólo a los casos más simples, cuando el límite de la suma integral podía ser calculado directamente.

La fórmula de Newton-Leibniz amplió considerablemente el campo de aplicación de la integral definida, puesto que los matemáticos obtuvieron un método general que permite solucionar diferentes problemas particulares. Esta fórmula amplió también la esfera de las aplicaciones de la integral definida en la técnica, mecánica, astronomía, etc.

Ejemplo 1. $\int_a^b x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_a^b = \frac{b^2-a^2}{2}$.

Ejemplo 2. $\int_a^b x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_a^b = \frac{b^3-a^3}{3}$.

Ejemplo 3. $\int_a^b x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_a^b = \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1}\ (n \neq -1)$.

Ejemplo 4. $\int_a^b e^x\,dx = e^x\Big|_a^b = e^b - e^a$.

Ejemplo 5. $\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x\Big|_0^{2\pi} = -(\cos 2\pi - \cos 0) = 0$.

Ejemplo 6. $\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{1+x^2}\Big|_0^1 = \sqrt{2}-1$.

§ 5. SUSTITUCION DE VARIABLE EN UNA INTEGRAL DEFINIDA

Teorema. *Supongamos que está dada la integral*

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

donde la función $f(x)$ es continua en el segmento $[a, b]$.

Introduzcamos una nueva variable t, por la fórmula:

$$x = \varphi(t).$$

Si

1) $\varphi(\alpha) = a$ y $\varphi(\beta) = b$,
2) $\varphi(t)$ y $\varphi'(t)$ *son continuas en el segmento* $[\alpha, \beta]$,
3) $f[\varphi(t)$ *está definida y es continua en el segmento* $[\alpha, \beta]$, *entonces:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt. \tag{1}$$

Demostración. Si $F(x)$ es función primitiva de $f(x)$, podemos escribir las siguientes igualdades:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \tag{2}$$

$$\int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt = F[\varphi(t)] + C. \tag{3}$$

La validez de la última igualdad se comprueba mediante la derivación de ambos miembros respecto a t (esta igualdad también se deduce de la fórmula (2) § 4, cap. X). De la igualdad (2) tenemos:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\,\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

De la igualdad (3):

$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt = F[\varphi(t)]\,\Big|_\alpha^\beta = F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)] = F(b) - F(a).$$

Los segundos miembros de las últimas expresiones son iguales, por tanto son iguales los primeros.

Observación. Notemos que al calcular la integral definida por la fórmula (1), no regresamos a la variable original. Si calculamos

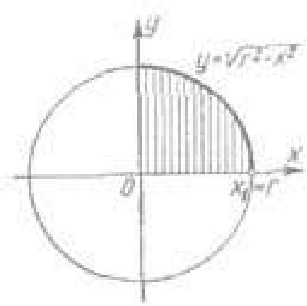

Fig. 217

la segunda integral definida de la igualdad (1), obtenemos un cierto número, la primera integral es igual a este número, es decir, los valores numéricos de dos integrales de la igualdad (1) son iguales.

Ejemplo. Calcular la integral

$$\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}\,dx.$$

Solución. Efectuemos la sustitución de variable:

$$x=r\operatorname{sen} t,\quad dx=r\cos t\,dt.$$

Determinemos los nuevos límites:

$$x=0 \text{ para } t=0$$

$$x=r \text{ para } t=\frac{\pi}{2}.$$

Por consiguiente,

$$\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2-r^2\operatorname{sen}^2 t}\,r\cos t\,dt=r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}\cos t\,dt=$$

$$=r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt=r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2t\right)dt=r^2\left[\frac{t}{2}+\frac{\operatorname{sen} 2t}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi r^2}{4}.$$

Desde el punto de vista geométrico, la integral calculada es el área de una cuarta parte del círculo limitado por una circunferencia $x^2+y^2=r^2$ (fig. 217).

§ 6. INTEGRACION POR PARTES

Supongamos que u y v son funciones derivables de x. Entonces:

$$(uv)'=u'v+uv'.$$

Integrando ambos miembros de la identidad entre los límites a y b obtenemos:

$$\int_a^b (uv)'\,dx=\int_a^b u'v\,dx+\int_a^b uv'\,dx. \tag{1}$$

Puesto que $\int (u\,v)'\,dx=uv+C$, entonces: $\int_a^b (uv)'\,dx=uv\big|_a^b$; por esto la igualdad (1) puede ser escrita en la forma:

$$uv\big|_a^b=\int_a^b v\,du+\int_a^b u\,dv$$

o, en definitiva: $\int_a^b u\,dv=uv\big|_a^b-\int_a^b v\,du.$

Ejemplo. Calcular la integral

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^n x\, dx.$$

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^n x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{n-1} x \operatorname{sen} x\, dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\operatorname{sen}^{n-1} x}_{u}\, \underbrace{d \cos x}_{dv} =$$

$$= -\operatorname{sen}^{n-1} x \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{n-2} x \cos x \cos x\, dx =$$

$$= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{n-2} x \cos^2 x\, dx = (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{n-2} x\, (1 - \operatorname{sen}^2 x)\, dx =$$

$$= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{n-2} x\, dx - (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^n x\, dx.$$

En las designaciones elegidas se puede escribir la última igualdad en la forma:

$$I_n = (n-1)\, I_{n-2} - (n-1)\, I_n,$$

de donde

$$I_n = \frac{n-1}{n}\, I_{n-2}. \tag{2}$$

Usando el mismo procedimiento, encontramos:

$$I_{n-2} = \frac{n-3}{n-2}\, I_{n-4}$$

por esto:

$$I_n = \frac{n-1}{n} \frac{n-3}{n-2}\, I_{n-4}.$$

Continuando de la misma manera llegamos a obtener I_0 ó I_1 según sea par o impar el número n.

Examinemos dos casos:

1) n es par, $n = 2m$:

$$I_{2m} = \frac{2m-1}{2m} \cdot \frac{2m-3}{2m-2} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}\, I_0;$$

2) n es impar, $n = 2m+1$:

$$I_{2m+1} = \frac{2m}{2m+1} \cdot \frac{2m-2}{2m-1} \cdots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}\, I_1,$$

pero, puesto que

$$I_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^0 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx=\frac{\pi}{2}\,,\quad I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x\,dx=1,$$

entonces:

$$I_{2m}=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2m} x\,dx=\frac{2m-1}{2m}\cdot\frac{2m-3}{2m-2}\cdots\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\,,$$

$$I_{2m+1}=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2m+1} x\,dx=\frac{2m}{2m+1}\cdot\frac{2m-2}{2m-1}\cdots\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\,.$$

De estas fórmulas se deduce la fórmula de Wallis que expresa el número $\frac{\pi}{2}$ en forma de producto infinito.

En efecto, de las últimas dos igualdades, dividiéndolas término a término; encontramos:

$$\frac{\pi}{2}=\left(\frac{2\cdot4\cdot6\,\ldots\,2m}{3\cdot5\,\ldots\,(2m-1)}\right)^2\frac{1}{2m+1}\,\frac{I_{2m}}{I_{2m+1}}\,. \tag{3}$$

Demostremos ahora que

$$\lim_{m\to\infty}\frac{I_{2m}}{I_{2m+1}}=1.$$

Para todo x del intervalo $\left(0,\,\frac{\pi}{2}\right)$ se verifican las desigualdades

$$\operatorname{sen}^{2m-1} x>\operatorname{sen}^{2m} x>\operatorname{sen}^{2m+1} x.$$

Integrando desde 0 hasta $\frac{\pi}{2}$, obtenemos:

$$I_{2m-1}\geqslant I_{2m}\geqslant I_{2m+1},$$

de donde:

$$\frac{I_{2m-1}}{I_{2m+1}}\geqslant\frac{I_{2m}}{I_{2m+1}}\geqslant 1. \tag{4}$$

De la igualdad (2) se deduce:

$$\frac{I_{2m-1}}{I_{2m+1}}=\frac{2m+1}{2m}\,.$$

Por tanto,

$$\lim_{m\to\infty}\frac{I_{2m-1}}{I_{2m+1}}=\lim_{m\to\infty}\frac{2m+1}{2m}=1.$$

De la desigualdad (4) obtenemos:

$$\lim\frac{I_{2m}}{I_{2m+1}}=1.$$

Pasando al límite en la fórmula (3), obtenemos la *fórmula de Wallis*:

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{m \to \infty} \left[\left(\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2m}{3 \cdot 5 \ldots (2m-1)} \right)^2 \frac{1}{2m+1} \right].$$

Se puede escribir esta fórmula en la forma:

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{m \to \infty} \left(\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdots \frac{2m-2}{2m-1} \cdot \frac{2m}{2m-1} \cdot \frac{2m}{2m+1} \right).$$

§ 7. INTEGRALES IMPROPIAS

1. **Integrales con límites infinitos.** Sea $f(x)$ una función definida y continua para todos los valores de x tales que $a \leqslant x < +\infty$. Examinemos la integral

$$I(b) = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Esta integral tiene significado, para cualquier $b > a$. Cuando b varía, la integral varía también, por esto la integral es una función

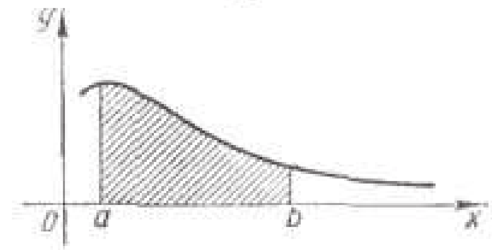

Fig. 218

continua de b (véase § 4). Examinemos cómo varía la integral cuando $b \to +\infty$ (fig. 218).

Definición. Si existe el límite finito

$$\lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\, dx,$$

este límite se llama *integral impropia* de la función $f(x)$ en el intervalo $[a, +\infty]$ y se designa por:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx.$$

Por tanto, según la definición tenemos:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\, dx.$$

En este caso suele decirse que la integral impropia $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$

existe o *converge*. Si la integral $\int_a^b f(x)\,dx$, para $b \to +\infty$, no tiene límite definito, se dice que $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *no existe* o *diverge*.

Es fácil definir el significado geométrico de la integral impropia para $f(x) \geqslant 0$: si la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ representa el área de un

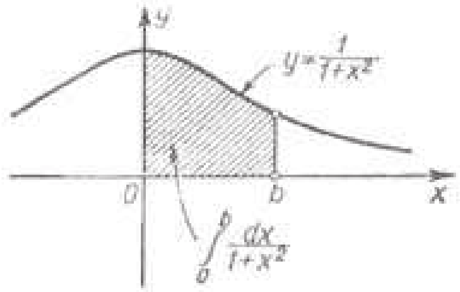

Fig. 219

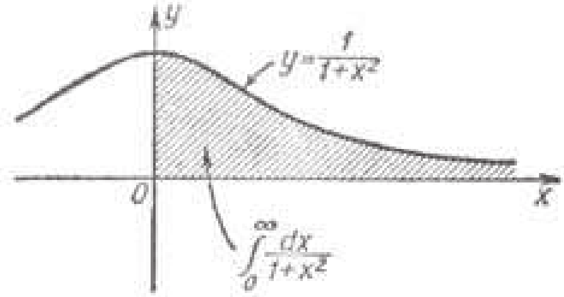

Fig. 220

dominio limitado por la curva $y = f(x)$, el eje de las abscisas y las ordenadas $x = a$, $x = b$, es natural considerar que la integral impropia $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ expresa el área de un dominio ilimitado (infinito), comprendido entre las líneas $y = f(x)$, $x = a$ y el eje de abscisas.

De modo análogo se determinan las integrales impropias en otros intervalos infinitos:

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{\alpha \to -\infty} \int_{\alpha}^{a} f(x)\,dx,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

La última igualdad, se comprende así: si existe cada una de las integrales impropias del segundo miembro, entonces existe (converge), según la definición, la integral del primer miembro.

Ejemplo 1. Calcular la integral $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ (véase figs. 219 y 220).

Solución. Según la definición de integral impropia hallamos:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \to +\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \to +\infty} \operatorname{arctg} x \Big|_0^b = \lim_{b \to +\infty} \operatorname{arctg} b = \frac{\pi}{2}.$$

La integral estudiada representa el área de un trapecio curvilíneo infinito. El área está rayada en la figura 220.

Ejemplo 2. Hallar los valores de α (fig. 221), para los cuales la integral $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$ converge o diverge.

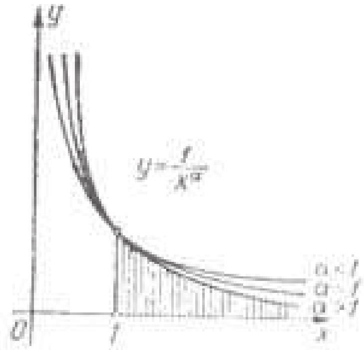

Fig. 221

Solución. Puesto que (para $\alpha \neq 1$)

$$\int\limits_{1}^{b} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha} \Big|_{1}^{b} = \frac{1}{1-\alpha} [b^{1-\alpha} - 1],$$

tenemos:

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \lim_{b \to +\infty} \frac{1}{1-\alpha} (b^{1-\alpha} - 1).$$

Por tanto,

si $\alpha > 1$, tenemos $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \frac{1}{\alpha - 1}$, es decir, la integral converge;

si $\alpha < 1$, tenemos $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \infty$, es decir, la integral diverge;

si $\alpha = 1$, tenemos $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_{1}^{+\infty} = \infty$, es decir, la integral diverge.

Ejemplo 3. Calcular $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

Solución.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}.$$

La segunda integral es igual a $\frac{\pi}{2}$ (véase el ejemplo 1). Calculemos la primera integral:

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\alpha \to -\infty} \int_{\alpha}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\alpha \to -\infty} \operatorname{arctg} x \Big|_{\alpha}^{0} = \lim_{\alpha \to -\infty} (\operatorname{arctg} 0 - \operatorname{arctg} \alpha) = \frac{\pi}{2}.$$

Por consiguiente,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

En muchos casos es suficiente establecer si la integral dada converge o diverge, y determinar su valor. En tales circunstancias pueden ser útiles dos teoremas siguientes, que citamos aquí sin demostración. Demos, algunos ejemplos de su aplicación.

Teorema 1. *Si para todos x $(x \geqslant a)$ se verifica la desigualdad*

$$0 \leqslant f(x) \leqslant \varphi(x),$$

siendo $\int_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$, convergente, entonces $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ también es convergente y

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \leqslant \int_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx.$$

Ejemplo 4. Analizar la convergencia de la integral

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1+e^x)}.$$

Solución. Notemos que para $1 \leqslant x$

$$\frac{1}{x^2(1+e^x)} < \frac{1}{x^2}$$

Luego,

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\Big|_1^{+\infty} = 1,$$

por tanto,

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1+e^x)}$$

converge y su valor es inferior a la 1.

Teorema 2. *Si para todos x $(x \geqslant a)$ se verifica la desigualdad $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant f(x)$, siendo $\int_a^{+\infty} \varphi(x)\, dx$ divergente, entonces $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ también es divergente.*

Ejemplo 5. Analizar la convergencia de la integral

$$\int_1^{+\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^3}}\, dx.$$

Notemos que

$$\frac{x+1}{\sqrt{x^3}} > \frac{x}{\sqrt{x^3}} = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Pero,

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{b \to +\infty} 2\sqrt{x}\Big|_1^b = +\infty.$$

Por tanto, la integral dada es divergente.

En los dos últimos teoremas estudiamos las integrales impropias de las funciones no negativas. Para el caso de una función $f(x)$ que cambia de signo en un intervalo infinito, tenemos el teorema siguiente.

Teorema 3. *Si la integral $\int_a^{+\infty} |f(x)|\, dx$ converge, entonces $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ también converge.* En este caso la última integral se llama *absolutamente convergente.*

Ejemplo 6. Analizar la convergencia de la integral

$$\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^3}\, dx.$$

Solución. Aquí el integrando es una función de signo variable. Notemos que

$$\left| \frac{\operatorname{sen} x}{x^3} \right| \leqslant \left| \frac{1}{x^3} \right|.$$

Pero, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2x^2}\Big|_1^{+\infty} = \frac{1}{2}.$

Por tanto, la integral $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left| \frac{\operatorname{sen} x}{x^3} \right| dx$ es convergente, de lo que se deduce que es convergente también la integral dada.

2. Integral de una función discontinua. Sea $f(x)$ una función definida y continua para $a \leqslant x < c$. Pero en el punto $x = c$ la función, o bien, no está definida, o bien es discontinua. En este caso no se puede definir la integral $\int_a^c f(x)\,dx$ como límite de sumas integrales, puesto que la función $f(x)$ no es continua en el segmento $[a, c]$ y este límite puede no existir.

La integral $\int_a^c f(x)\,dx$ de la función $f(x)$, discontinua en el punto c, se determina del modo siguiente:

$$\int_a^c f(x)\,dx = \lim_{b \to c-0} \int_a^b f(x)\,dx.$$

Esta integral se llama integral impropia *convergente* si existe el límite del segundo miembro de la igualdad y se llama *divergente* en el caso contrario.

Si la función $f(x)$ es discontinua en el extremo izquierdo del segmento $[a, c]$ (es decir, cuando $x = a$), entonces, según la definición:

$$\int_a^c f(x)\,dx = \lim_{b \to a+0} \int_b^c f(x)\,dx.$$

Si la función $f(x)$ es discontinua en un punto $x = x_0$, dentro del segmento $[a, c]$, entonces:

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^{x_0} f(x)\,dx + \int_{x_0}^c f(x)\,dx,$$

si existen ambas integrales impropias del segundo miembro.

Ejemplo 7. Calcular $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$.

Solución.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{b\to 1-0} \int_0^b \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = -\lim_{b\to 1-0} 2\sqrt{1-x}\,\Big|_0^b =$$

$$= -\lim_{b\to 1-0} 2\left[\sqrt{1-b}-1\right] = 2.$$

Ejemplo 8. Calcular la integral $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$.

Solución. Como dentro del segmento de integración existe un punto $x=0$, en el que el integrando es discontinuo, la integral debe ser representada como la suma de dos términos:

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon_1 \to -0} \int_{-1}^{\varepsilon_1} \frac{dx}{x^2} + \lim_{\varepsilon_2 \to +0} \int_{\varepsilon_2}^{1} \frac{dx}{x^2}.$$

Calculemos por separado cada límite:

$$\lim_{\varepsilon_1 \to -0} \int_{-1}^{\varepsilon_1} \frac{dx}{x^2} = -\lim_{\varepsilon_1 \to -0} \frac{1}{x}\Big|_{-1}^{\varepsilon_1} = -\lim_{\varepsilon_1 \to -0} \left(\frac{1}{\varepsilon_1} - \frac{1}{-1}\right) = \infty.$$

Por tanto, en el intervalo $[-1, 0]$ la integral diverge

$$\lim_{\varepsilon_2 \to +0} \int_{\varepsilon_2}^{1} \frac{dx}{x^2} = -\lim_{\varepsilon_2 \to +0} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_2}\right) = \infty.$$

Entonces en el intervalo $[0, 1]$ la integral también diverge.

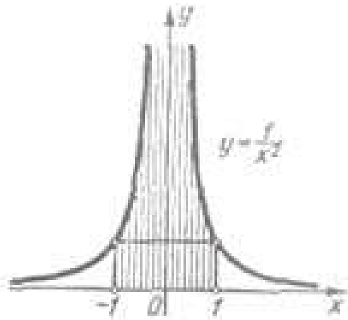

Fig. 222

Así, la integral dada diverge en todo el segmento $[-1, 1]$. Notemos que, si hubiéramos calculado la integral dada, sin tener en cuenta la discontinuidad del integrando en el punto $x = 0$, habríamos obtenido un resultado erróneo. En efecto,

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{1} = -\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{-1}\right) = -2,$$

lo que es imposible (fig. 222).

Observación. Si la función $f(x)$, definida en el segmento $[a, b]$, tiene dentro de este segmento un número finito de puntos de discontinuidad: $a_1, a_2, \ldots, a_n$, la integral de la función $f(x)$ en el segmento $[a, b]$ se determina del modo siguiente:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{a_1} f(x)\,dx + \int_{a_1}^{a_2} f(x)\,dx + \ldots + \int_{a_n}^{b} f(x)\,dx,$$

si cada una de las integrales impropias del segundo miembro converge. Si por lo menos una de las integrales diverge, entonces, $\int_a^b f(x)\,dx$ es también divergente.

Para determinar la convergencia de integrales impropias de las funciones discontinuas y calcular sus valores se pueden aplicar frecuentemente teoremas análogos a los teoremas de las integrales con límites infinitos.

Teorema I′. *Si las funciones $f(x)$ y $\varphi(x)$ son discontinuas en el punto c del segmento $[a, c]$, mientras que en todos los puntos de este segmento se cumplen las desigualdades*

$$\varphi(x) \geqslant f(x) \geqslant 0,$$

y $\int_a^c \varphi(x)\,dx$ es convergente, entonces $\int_a^c f(x)\,dx$ es también convergente.

Teorema II′. *Si las funciones $f(x)$ y $\varphi(x)$ son discontinuas en el punto c del segmento $[a, c]$, mientras que en todos los puntos de este segmento se cumplen las desigualdades $f(x) \geqslant \varphi(x) \geqslant 0$ y $\int_a^c \varphi(x)\,dx$ es divergente, entonces $\int_a^c f(x)\,dx$ es también divergente.*

Teorema III′. *Si $f(x)$ es una función de signo variable en el segmento $[a, c]$ y discontinua sólo en el punto c, mientras que la integral impropia $\int_a^c |f(x)|\,dx$ del valor absoluto de esta función es convergente, entonces la integral $\int_a^c f(x)\,dx$ de la misma función $f(x)$ es también convergente.*

A menudo se toma $\frac{1}{(c-x)^\alpha}$ como funciones de comparación, cómodas para comparar con las funciones que se encuentran bajo el signo de la integral impropia. Es fácil comprobar que $\int_a^c \frac{1}{a(c-x)^\alpha}\,dx$ converge para $\alpha < 1$ y diverge para $\alpha \geqslant 1$.

Lo mismo sucede con las integrales $\int_a^c \frac{1}{(x-a)^\alpha}\,dx$.

Ejemplo 9. ¿Es convergente la integral

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}+4x^3}\,dx?$$

Solución. El integrando es discontinuo en el extremo izquierdo del segmento [0, 1]. Comparándolo con la función $\frac{1}{\sqrt{x}}$, tenemos:

$$\frac{1}{\sqrt{x+4x^3}} < \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

La integral impropia $\int_0^1 \frac{dx}{x^{1/2}}$ existe. Por consiguiente, la integral impropia de la menor función, es decir, $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x+4x^3}}\,dx$, también existe.

§ 8. CALCULO APROXIMADO DE LAS INTEGRALES DEFINIDAS

En la parte final del capítulo X hemos indicado que no toda función continua tiene una primitiva expresada mediante funciones elementales. En estos casos el cálculo de las integrales definidas por la aplicación de la fórmula de Newton-Leibniz es difícil por lo que se utilizan otros métodos para un cálculo aproximado de las integrales definidas.

Expongamos algunos métodos de la integración aproximada, partiendo de la noción de integral definida como límite de una suma.

I. Fórmula de los rectángulos. Sea $y = f(x)$ una función continua en el segmento $[a, b]$. Calcular la integral definida

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Dividamos el segmento $[a, b]$ por medio de los puntos $a = x_0$, x_1, x_2, . . ., $x_n = b$ en n partes iguales de longitud Δx:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}.$$

Designemos por $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, y_n$ los valores de la función $f(x)$ en los puntos $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$, es decir,

$$y_0 = f(x_0);\; y_1 = f(x_1);\; \ldots;\; y_n = f(x_n).$$

Formemos las sumas:

$$y_0\Delta x + y_1\Delta x + \ldots + y_{n-1}\Delta x,$$
$$y_1\Delta x + y_2\Delta x + \ldots + y_n\Delta x.$$

Cada una de estas sumas es una suma integral de la función $f(x)$ en el segmento $[a, b]$, y por eso, expresa aproximadamente la integral

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}), \tag{1}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}(y_1 + y_2 + \ldots + y_n). \tag{1'}$$

Estas son las *fórmulas de los rectángulos.* De la figura 223 se deduce que, si $f(x)$ es una función positiva y creciente, la fórmula (1) representa el área de una figura escalonada, compuesta por los

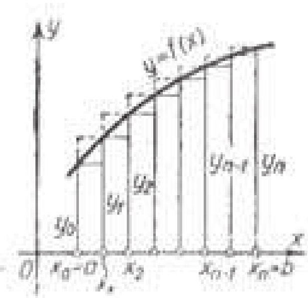

Fig. 223

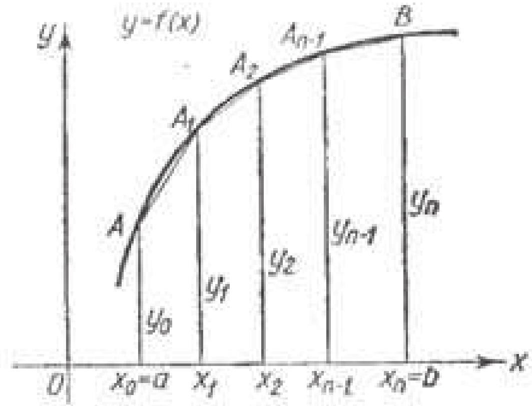

Fig. 224

rectángulos «interiores», y la fórmula (1′), el área de la figura escalonada, compuesta por los rectángulos «exteriores».

El error que se comete durante el cálculo de la integral por la fórmula de los rectángulos es tanto menor cuanto mayor sea el número n $\left(\text{es decir, cuanto menor sea el paso de la división } x = \frac{b-a}{n}\right)$.

II. Fórmula de los trapecios. Es natural esperar un valor más exacto de la integral definida, si cambiamos la curva dada $y = f(x)$ no por una línea escalonada que utilizamos para la fórmula de los rectángulos, sino por una línea quebrada inscrita (fig. 224).

En este caso, en vez del área del trapecio curvilíneo $aABb$ obtenemos la suma de las áreas de los trapecios rectangulares limitados por arriba por las cuerdas AA_1, A_1A_2, . . ., $A_{n-1}B$. Como las áreas de estos trapecios son respectivamente iguales a $\frac{y_0+y_1}{2}\Delta x$, $\frac{y_1+y_2}{2}\Delta x$, etc, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \left(\frac{y_0+y_1}{2}\Delta x + \frac{y_1+y_2}{2}\Delta x + \ \ldots\ + \frac{y_{n-1}+y_n}{2}\Delta x\right),$$

ó

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2} + y_1 + y_2 + \ \ldots\ + y_{n-1}\right). \qquad (2)$$

Esta es la *fórmula de los trapecios.*

El número n se elige arbitrariamente. Cuanto mayor sea este número n y, por tanto, cuanto menor sea el paso $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, con tanta mayor precisión la suma del segundo miembro de la igualdad aproximada (2) expresará el valor de la integral.

III. Fórmula de las parábolas (Fórmula de Simpson). Dividamos el segmento $[a, b]$ en un número par $n = 2m$ de partes iguales. El área del trapecio curvilíneo correspondiente a los dos primeros segmentos,

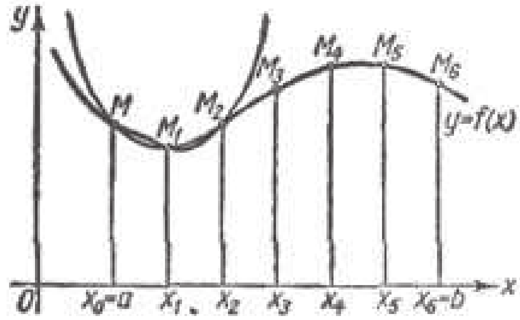

Fig. 225

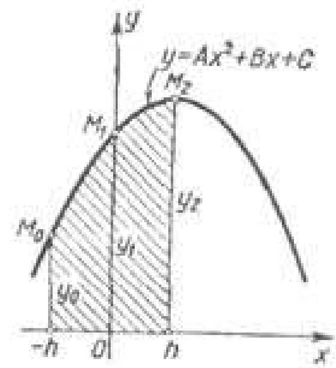

Fig. 226

$[x_0, x_1]$ y $[x_1, x_2]$ y limitado en su parte superior por la curva dada $y = f(x)$, se sustituye por el área de otro trapecio curvilíneo limitado por una **parábola de segundo grado** que pasa por los tres puntos:

$$M(x_0, y_0);\ M_1(x_1, y_1);\ M_2(x_2, y_2)$$

y tiene el eje paralelo al eje Oy (fig. 225). Tal trapecio curvilíneo es un trapecio *parabólico*.

La ecuación de una parábola con el eje paralelo a Oy es

$$y = Ax^2 + Bx + C.$$

Los coeficientes A, B, y C se determinan unívocamente de la condición de que la parábola pase por los tres puntos dados. Construimos también parábolas semejantes para otras pares de los segmentos. La suma de las áreas de los trapecios parabólicos da el valor aproximado de la integral.

Calculemos al principio el área de un trapecio parabólico.

Lema. *Si el trapecio curvilíneo está limitado por una parábola*

$$y = Ax^2 + Bx + C,$$

el eje Ox y dos ordenadas, la distancia entre las cuales es igual a $2h$, entonces su área es igual a

$$S = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2), \tag{3}$$

donde, y_0 e y_2 son ordenadas de los extremos e y_1 es ordenada de la curva en el punto medio del segmento.

Demostración. Dispongamos el sistema de coordenadas auxiliar del modo como se indica en la figura 226. Los coeficientes en la ecuación de la parábola $y = Ax^2 + Bx + C$ se determinan de las siguientes igualdades:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{si } x_0 = -h, \text{ entonces:} & y_0 = Ah^2 - Bh + C; \\ \text{si } x_1 = 0, \text{ entonces:} & y_1 = C; \\ \text{si } x_2 = h, \text{ entonces:} & y_2 = Ah^2 + Bh + C. \end{array}\right\} \tag{4}$$

Considerando que los coeficientes A, B, C son conocidos, determinemos el área del trapecio parabólico mediante la integral definida:

$$S = \int_{-h}^{h} (Ax^2 + Bx + C)\,dx = \left[\frac{Ax^3}{3} + \frac{Bx^2}{2} + Cx\right]_{-h}^{h} =$$

$$= \frac{h}{3}(2Ah^2 + 6C).$$

Pero, de las ecuaciones (4) se deduce que

$$y_0 + 4y_1 + y_2 = 2Ah^2 + 6C.$$

Por consiguiente,

$$S = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2),$$

lo que se trataba de demostrar.

Regresemos a nuestro problema principal (véase fig. 225). Utilizando la fórmula (3) podemos escribir las siguientes igualdades aproximadas ($h = \Delta x$):

$$\int_{a=x_0}^{x_2} f(x)\,dx \approx \frac{\Delta x}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2),$$

$$\int_{x_2}^{x_4} f(x)\,dx \approx \frac{\Delta x}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4),$$

. . . .

$$\int_{x_{2m-2}}^{x_{2m}=b} f(x)\,dx \approx \frac{\Delta x}{3}(y_{2m-2} + 4y_{2m-1} + y_{2m}).$$

Sumando miembro a miembro, obtenemos a la izquierda la integral buscada, y a la derecha, su valor aproximado:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{\Delta x}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \ldots$$

$$\ldots + 2y_{2m-2} + 4y_{2m-1} + y_{2m}). \qquad (5)$$

ó

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6m}[y_0 + y_{2m} + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2m-2}) +$$

$$+ 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2m-1})].$$

La última es la fórmula de Simpson. Aquí el número $2m$ de los puntos de división es arbitrario; pero cuanto mayor sea este número tanto mayor es la precisión con la que la suma del segundo miembro *de la igualdad (5) expresa el valor de la integral* *).

Ejemplo. Calcular aproximadamente:

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{dx}{x}.$$

Solución. Dividamos el segmento $[1, 2]$ en 10 partes iguales (fig. 227). Haciendo

$$\Delta x = \frac{2-1}{10} = 0{,}1,$$

*) Para determinar el número de puntos de división que se deben tomar para calcular la integral con un grado de precisión dado, se pueden utilizar las fórmulas de evaluación de los errores cometidos durante el cálculo aproximado de la integral. Aquí no se dan estas fórmulas de evaluación.

formamos la tabla de los valores del integrando:

x	$y=\frac{1}{x}$	x	$y=\frac{1}{x}$
$x_0=1,0$	$y_0=1,00000$	$x_6=1,6$	$y_6=0,62500$
$x_1=1,1$	$y_1=0,90909$	$x_7=1,7$	$y_7=0,58824$
$x_2=1,2$	$y_2=0,83333$	$x_8=1,8$	$y_8=0,55556$
$x_3=1,3$	$y_3=0,76923$	$x_9=1,9$	$y_9=0,52632$
$x_4=1,4$	$y_4=0,71429$	$x_{10}=2,0$	$y_{10}=0,50000$
$x_5=1,5$	$y_5=0,66667$		

I. Según la primera fórmula de los rectángulos (1) obtenemos:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx 0,1\,(y_0+y_1+\ldots+y_9)=0,1\cdot 7,18773=0,71877.$$

Según la segunda fórmula de los rectángulos (1′) obtenemos:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx 0,1\,(y_1+y_2+\ldots+y_{10})=0,1\cdot 6,68773=0,66877.$$

Directamente de la figura 227 se deduce que en el caso dado la primera fórmula da el valor de la integral por exceso y la segunda, por defecto.

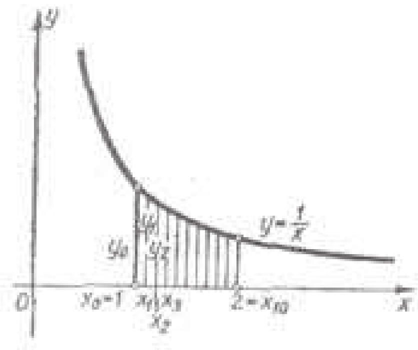

Fig. 227

II. Según la fórmula de los trapecios (2) obtenemos:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx 0,1\left(\frac{1+0,5}{2}+6,18773\right)=0,69377.$$

III. Según la fórmula de Simpson tenemos:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx \frac{0,1}{3}\,[y_0+y_{10}+2\,(y_2+y_4+y_6+y_8)+4\,(y_1+y_3+y_5+y_7+y_9)]=$$

$$=\frac{0,1}{3}\,(1+0,5+2\cdot 2,72818+4\cdot 3,45955)=0,69315.$$

En realidad $\ln 2 = \int_1^2 \frac{dx}{x} = 0{,}6931472$ (con precisión de hasta el séptimo dígito decimal).

Por consiguiente: *al dividir el segmento [0, 1] en 10 partes iguales obtenemos*:

— según la fórmula de Simpson, cinco dígitos correctos,
— según la fórmula de los trapecios, solamente tres dígitos correctos,
— según la fórmula de los rectángulos, podemos estar seguros de que solamente el primer dígito es correcto.

§ 9. FORMULA DE CHEBISHEV

En los cálculos técnicos se utiliza frecuentemente la fórmula de integración aproximada de Chébishev. Supongamos que es preciso calcular

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Sustituyamos el integrando por el polinomio de interpolación de Lagrange $P(x)$ (§ 9, cap. VII), tomando en el segmento $[a, b]$ n valores de la función: $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$, donde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son los puntos arbitrarios del segmento $[a, b]$:

$$P(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_2)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_n)} f(x_1) +$$
$$+ \frac{(x-x_1)(x-x_3)\ldots(x-x_n)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\ldots(x_2-x_n)} f(x_2) +$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_1)(x_n-x_2)\ldots(x_n-x_{n-1})} f(x_n). \quad (1)$$

Obtenemos la siguiente fórmula aproximada de integración:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b P(x)\,dx, \quad (2)$$

la que después de algunos cálculos toma la forma:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx C_1 f(x_1) + C_2 f(x_2) + \ldots + C_n f(x_n), \quad (3)$$

donde los coeficientes C_i se calculan por las fórmulas:

$$C_i = \int_a^b \frac{(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}\,dx. \tag{4}$$

La fórmula (3) es complicada e incómoda para los cálculos, puesto que los coeficientes C_i se expresan mediante fracciones complejas.

Chébishev planteó el problema inverso: dados en vez de las abscisas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ los coeficientes $C_1, C_2, \ldots, C_n$, determinar las abscisas $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Los coeficientes C_i se dan de modo que la fórmula (3) sea la más simple posible para los cálculos. Es evidente que esto se logra cuando todos los coeficientes C_i son iguales entre sí:

$$C_1 = C_2 = \ldots = C_n.$$

Designemos por C_n el valor común de los coeficientes $C_1, C_2, \ldots, C_n$, entonces la fórmula (3) toma la forma:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx C_n[f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)]. \tag{5}$$

La fórmula (5) representa en general una igualdad aproximada, pero si $f(x)$ es un polinomio de grado no superior a $(n-1)$ obtenemos entonces una igualdad exacta. Esta circunstancia permite determinar las magnitudes $C_n, x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Para obtener una fórmula cómoda para todo intervalo de integración, transformemos el segmento de integración $[a, b]$ en el segmento $[-1, 1]$. Para esto hagamos

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t;$$

entonces para $t=-1;\quad x=a;$

para $t=1,\quad x=b.$

Por consiguiente,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t\right)dt = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1}\varphi(t)\,dt,$$

donde por $\varphi(t)$ está designada la función de t, que se halla bajo el signo de la integral. Así, la integración de una función $f(x)$ en el segmento $[a, b]$ siempre puede ser reducida a la integración de alguna otra función $\varphi(x)$ en el segmento $[-1, 1]$.

El problema se ha reducido a la elección de los números C_n, x_1, x_2, $\ldots$, x_n, en la fórmula

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = C_n[f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)] \tag{6}$$

de modo que esta fórmula sea exacta para cualquier función $f(x)$ de la forma

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1}. \tag{7}$$

Notemos que

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1})\,dx =$$

$$= \begin{cases} 2\left(a_0 + \dfrac{a_2}{3} + \dfrac{a_4}{5} + \dfrac{a_6}{7} + \ldots + \dfrac{a_{n-1}}{n}\right), & \text{si } n \text{ es impar;} \\ 2\left(a_0 + \dfrac{a_2}{3} + \ldots + \dfrac{a_{n-2}}{n-1}\right), & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases} \tag{8}$$

Por otra parte, la suma del segundo miembro de la igualdad (6), en virtud de (7), es igual a

$$C_n[na_0 + a_1(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) + a_2(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2) + \ldots$$
$$\ldots + a_{n-1}(x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + \ldots + x_n^{n-1})]. \tag{9}$$

Igualando las expresiones (8) y (9), obtenemos la igualdad que debe ser válida para cualesquiera a_0, a_1, a_2, $\ldots$, a_{n-1}.

$$2\left(a_0 + \frac{a_2}{3} + \frac{a_4}{5} + \frac{a_6}{7} + \ldots\right) =$$

$$= C_n[na_0 + a_1(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) + a_2(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2) + \ldots$$
$$\ldots + a_{n-1}(x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + \ldots + x_n^{n-1})].$$

Igualando los coeficientes de $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}$ en los dos miembros de la igualdad, tenemos:

$$\left.\begin{aligned}
&2 = C_n n \quad \text{o} \quad C_n = \frac{2}{n};\\
&x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0;\\
&x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = \frac{2}{3C_n} = \frac{n}{3};\\
&x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_n^3 = 0;\\
&x_1^4 + x_2^4 + \ldots + x_n^4 = \frac{2}{5C_n} = \frac{n}{5};\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Hallamos las abscisas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de las últimas n ecuaciones. Chébishev encontró estas soluciones para diferentes valores de n.

Número de ordenadas n	Coeficiente C_n	Valores de abscisas $x_1, x_2, \ldots, x_n$
3	$\frac{2}{3}$	$x_1 = -x_3 = 0{,}707107$ $x_2 = 0$
4	$\frac{1}{2}$	$x_1 = -x_4 = 0{,}794654$ $x_2 = -x_3 = 0{,}187592$
5	$\frac{2}{5}$	$x_1 = -x_5 = 0{,}832498$ $x_2 = -x_4 = 0{,}374541$ $x_3 = 0$
6	$\frac{1}{3}$	$x_1 = -x_6 = 0{,}866247$ $x_2 = -x_5 = 0{,}422519$ $x_3 = -x_4 = 0{,}266635$
7	$\frac{2}{7}$	$x_1 = -x_7 = 0{,}883862$ $x_2 = -x_6 = 0{,}529657$ $x_3 = -x_5 = 0{,}323912$ $x_4 = 0$
9	$\frac{2}{9}$	$x_1 = -x_9 = 0{,}911589$ $x_2 = -x_8 = 0{,}601019$ $x_3 = -x_7 = 0{,}528762$ $x_4 = -x_6 = 0{,}167906$ $x_5 = 0$

Abajo se dan las soluciones halladas por él para los casos en que el número n de puntos intermedios es igual a 3, 4, 5, 6, 7, 9.

Por consiguiente, el cálculo aproximado de la integral en el segmento $[-1, 1]$ se efectúa según la siguiente *fórmula de Chébishev*

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \frac{2}{n}[f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)],$$

donde, n es uno de los números 3, 4, 5, 6, 7 ó 9, y $x_1, \ldots, x_n$, números representados en la tabla. No se puede tomar por n el número 8 u otros números superiores a 9, puesto que en este caso el sistema de ecuaciones (10) da las raíces imaginarias. Cuando los límites de integración de la integral dada son a y b, la fórmula de Chébishev toma la forma:

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \frac{b-a}{n}[f(X_1) + f(X_2) + \ldots + f(X_n)],$$

donde $X_i = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, y los x_i tienen los valores indicados en la tabla.

Demos un ejemplo de cálculo de una integral con ayuda de la fórmula de Chébishev.

Ejemplo. Calcular $\int_{1}^{2} \frac{dx}{x}$ $(= \ln 2)$.

Solución. Mediante la sustitución de variables, transformemos esta integral en otra que tiene -1 y 1 como *límites de integración*.

$$x = \frac{1+2}{2} + \frac{2-1}{2} t = \frac{3}{2} + \frac{t}{2} = \frac{3+t}{2},$$

$$dx = \frac{dt}{2}.$$

Entonces,

$$\int_{1}^{2} \frac{dx}{x} = \int_{-1}^{1} \frac{dt}{3+t}.$$

Aplicando la fórmula de Chébishev calculemos la última integral, haciendo $n = 3$:

$$\int_{-1}^{1} f(t)\,dt = \frac{2}{3}[f(0{,}707107) + f(0) + f(-0{,}707107)].$$

Puesto que

$$f(0{,}707107)=\frac{1}{3+0{,}707107}=\frac{1}{3{,}707107}=0{,}269752,$$

$$f(0)=\frac{1}{3+0}=0{,}333333,$$

$$f(-0{,}707107)=\frac{1}{3-0{,}707107}=\frac{1}{2{,}292893}=0{,}436130,$$

entonces:

$$\int_{-1}^{1}\frac{dt}{3+t}=\frac{2}{3}(0{,}269752+0{,}333333+0{,}436130)=$$

$$=\frac{2}{3}\cdot 1{,}039215=0{,}692810\approx 0{,}693.$$

Comparando este resultado con los resultados obtenidos según la fórmula de los rectángulos, de los trapecios y la de Simpson (véase el ejemplo del párrafo anterior), notamos que el resultado obtenido mediante la fórmula de Chébishev (con tres puntos intermedios) es más preciso y está más cerca del valor real de la integral que el resultado obtenido según la fórmula de los trapecios (con nueve puntos intermedios).

La teoría del cálculo aproximado de las integrales está desarrollada en las obras del académico A. N. Krilov (1863-1945).

§ 10. INTEGRALES DEPENDIENTES DE UN PARAMETRO

Derivación de las integrales dependientes de un parámetro.

Sea la integral

$$I(\alpha)=\int_a^b f(x,\ \alpha)\,dx, \tag{1}$$

en la que el integrando depende de un cierto parámetro α. Si el parámetro α varía, el valor de la integral definida variará también. Así, la integral definida es una función de α; por esto podemos designarla por $I(\alpha)$.

1. Supongamos que $f(x,\ \alpha)$ y $f'_\alpha(x,\ \alpha)$ son funciones continuas en las que

$$c\leqslant\alpha\leqslant d \text{ y } a\leqslant x\leqslant b. \tag{2}$$

Hallemos la derivada de la integral respecto al parámetro α:

$$\lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{I(\alpha+\Delta\alpha)-I(\alpha)}{\Delta\alpha}=I'_\alpha(\alpha).$$

Para hallar esta derivada notemos

$$I(\alpha+\Delta\alpha)=\int_a^b f(x,\ \alpha+\Delta\alpha)\,dx$$

y, por tanto,

$$I(\alpha+\Delta\alpha)-I(\alpha)=\int_a^b f(x,\ \alpha+\Delta\alpha)\,dx-\int_a^b f(x,\ \alpha)\,dx=$$

$$=\int_a^b [f(x,\ \alpha+\Delta\alpha)-f(x,\ \alpha)]\,dx;$$

$$\frac{I(\alpha+\Delta\alpha)-I(\alpha)}{\Delta\alpha}=\int_a^b \frac{f(x,\ \alpha+\Delta\alpha)-f(x,\ \alpha)}{\Delta\alpha}\,dx.$$

Aplicando el teorema de Lagrange al integrando, tenemos:

$$\frac{f(x,\ \alpha+\Delta\alpha)-f(x,\ \alpha)}{\Delta\alpha}=f'_\alpha(x,\ \alpha+\theta\,\Delta\alpha),$$

donde $0<\theta<1$.

Puesto que $f'_\alpha(x,\ \alpha)$ es continua en el dominio cerrado (2), entonces:

$$f'_\alpha(x,\ \alpha+\theta\,\Delta\alpha)=f'_\alpha(x,\ \alpha)+\varepsilon,$$

donde la magnitud ε que depende de x, α, $\Delta\alpha$, tiende a cero, cuando $\Delta\alpha\to 0$.

De tal modo:

$$\frac{I(\alpha+\Delta\alpha)-I(\alpha)}{\Delta\alpha}=\int_a^b [f'_\alpha(x,\ \alpha)+\varepsilon]\,dx=\int_a^b f'_\alpha(x,\ \alpha)\,dx+\int_a^b \varepsilon\,dx.$$

Pasando al límite para $\Delta\alpha\to 0$, obtenemos *):

$$\lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{I(\alpha+\Delta\alpha)-I(\alpha)}{\Delta\alpha}=I'_\alpha(\alpha)=\int_a^b f'_\alpha(x,\ \alpha)\,dx$$

o

$$\left[\int_a^b f(x,\ \alpha)\,dx\right]'_\alpha=\int_a^b f'_\alpha(x,\ \alpha)\,dx.$$

La última fórmula se llama *fórmula de Leibniz.*

---

*) El integrando en la integral $\int_a^b \varepsilon d\alpha$ tiende a cero para $\Delta\alpha\to 0$. Del hecho de que el integrando tiende a cero en cada punto, no siempre se deduce que la integral también tiende a cero. Sin embargo, en el caso dado, $\int_a^b \varepsilon dx$ tiende a cero para $\Delta\alpha\to 0$, lo que admitimos aquí sin demostración.

2. Supongamos ahora que en la integral (1) **los límites de integración** a **y** b **son funciones de** α:

$$I(\alpha) = \Phi[\alpha,\ a(\alpha),\ b(\alpha)] = \int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f(x,\ \alpha)\,dx. \qquad (1')$$

$\Phi[\alpha,\ a(\alpha),\ b(\alpha)]$ es una función compleja de α, siendo a y b los argumentos intermedios. Para hallar la derivada de $I(\alpha)$, apliquemos la regla de derivación de una función compleja de varias variables (véase § 10, cap. VIII):

$$I'(\alpha) = \frac{\partial\Phi}{\partial\alpha} + \frac{\partial\Phi}{\partial a}\frac{da}{d\alpha} + \frac{\partial\Phi}{\partial b}\frac{db}{d\alpha}. \qquad (3)$$

En virtud del teorema sobre la derivación de una integral definida respecto a su límite superior variable (véase la fórmula (1) § 4), obtenemos:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial b} = \frac{\partial}{\partial b}\int_a^b f(x,\ \alpha)\,dx = f[b(\alpha),\ \alpha],$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a}\int_a^b f(x,\ \alpha)\,dx = -\frac{\partial}{\partial a}\int_b^a f(x,\ \alpha)\,dx = -f[a(\alpha),\ \alpha].$$

Finalmente para calcular $\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}$ apliquemos la fórmula de Leibniz, obtenida anteriormente:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha} = \int_a^b f'_\alpha(x,\ \alpha)\,dx.$$

Introduciendo en la fórmula (3) las expresiones obtenidas de las derivadas, tenemos:

$$I'_\alpha(\alpha) = \int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f'_\alpha(x,\ \alpha)\,dx + f[b(\alpha),\ \alpha]\frac{db}{d\alpha} - f[a(\alpha),\ \alpha]\frac{da}{d\alpha}. \qquad (4)$$

La fórmula de Leibniz permite calcular ciertas integrales definidas.

Ejemplo. Calcular la integral

$$\int_0^\infty e^{-x}\frac{\operatorname{sen}\alpha x}{x}\,dx.$$

Solución. Notemos, que no se puede calcular directamente esta integral, puesto que la primitiva de la función $e^{-x}\frac{\operatorname{sen}\alpha x}{x}$ no se expresa mediante funciones elementales. Para calcular esta integral, considerémosla como función de un parámetro α:

$$I(\alpha)=\int_0^\infty e^{-x}\frac{\operatorname{sen}\alpha x}{x}\,dx.$$

Entonces, su derivada respecto a α se halla según la fórmula de Leibniz*):

$$I'(\alpha)=\int_0^\infty\left[e^{-x}\frac{\operatorname{sen}\alpha x}{x}\right]'_\alpha dx=\int_0^\infty e^{-x}\cos\alpha x\,dx.$$

La última integral se calcula fácilmente con ayuda de las funciones elementales y es igual a $\frac{1}{1+\alpha^2}$. Por eso

$$I'(\alpha)=\frac{1}{1+\alpha^2}.$$

Integrando la identidad obtenida, hallamos $I(\alpha)$:

$$I(\alpha)=\operatorname{arctg}\alpha+C. \qquad (5)$$

Ahora falta determinar C. Para esto notemos que

$$I(0)=\int_0^\infty e^{-x}\frac{\operatorname{sen}0x}{x}\,dx=\int_0^\infty 0\,dx=0.$$

Además, $\operatorname{arctg}0=0$.

Poniendo en la igualdad (5) $\alpha=0$, obtenemos:

$$I(0)=\operatorname{arctg}0+C,$$

de donde $C=0$. Por consiguiente, para todo valor de α se verifica la igualdad

$$I(\alpha)=\operatorname{arctg}\alpha,$$

es decir,

$$\int_0^\infty e^{-x}\frac{\operatorname{sen}\alpha x}{x}\,dx=\operatorname{arctg}\alpha.$$

*) La fórmula de Leibniz se ha obtenido en la suposición de que los límites de integración a y b son finitos. En este caso la fórmula de Leibniz también es válida, aunque uno de los límites de integración es infinito.

§ 11. INTEGRACION DE UNA FUNCION COMPLEJA DE UNA VARIABLE REAL

En el § 4, cap. VII, hemos determinado una función compleja de la variable real x:

$$\widetilde{f}(x) = u(x) + iv(x) \tag{1}$$

y su derivada:

$$\widetilde{f}'(x) = u'(x) + iv'(x). \tag{2}$$

Definición. La función $\widetilde{F}(x) = U(x) + iV(x)$ se llama primitiva de una función compleja de la variable real x, si

$$\widetilde{F}'(x) = \widetilde{f}(x), \tag{3}$$

es decir, si:

$$U'(x) + iV'(x) = u(x) + iv(x) \tag{4}$$

De la igualdad (4) se deduce:

$$U'(x) = u(x)$$
$$V'(x) = v(x),$$

es decir, $U(x)$ es la primitiva para $u(x)$, y $V(x)$ es la primitiva para $v(x)$.

De la definición y la última observación se deduce que, si $\widetilde{F}(x) = U(x) + iV(x)$ es la primitiva para $\widetilde{f}(x)$, entonces la primitiva cualquiera para $\widetilde{f}(x)$ tiene la forma $\widetilde{F}(x) + C$, donde C es una constante compleja arbitraria.

La expresión $\widetilde{F}(x) + C$ se llama integral definida de una función compleja de la variable real y se escribe:

$$\int \widetilde{f}(x)\,dx = \int u(x)\,dx + i\int v(x)\,dx = \widetilde{F}(x) + C. \tag{5}$$

La integral definida de una función compleja de la variable real se determina del modo siguiente:

$$\text{si } f(x) = u(x) + iv(x),$$

entonces:

$$\int_a^b \widetilde{f}(x)\,dx = \int_a^b u(x)\,dx + i\int_a^b v(x)\,dx. \tag{6}$$

Esta definición no contradice, sino que concuerda con la definición de la integral definida como límite de una suma.

Ejercicios para el capítulo XI

1. Calcular las integrales definidas, considerándolas como límites de la suma integral s_n.

$$\int_a^b x^2\,dx.$$

Indicación: Divídase el segmento $[a, b]$ en n partes mediante los puntos $x_i = aq^i$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$, donde $q = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}$. *Respuesta*: $\frac{b^3 - a^3}{3}$. **2.** $\int_a^b \frac{dx}{x}$, donde $0 < a < b$. *Respuesta*: $\ln \frac{b}{a}$.

Indicación. Dividir el segmento $[a, b]$ como en el ejemplo anterior.

3. $\int_a^b \sqrt{x}\,dx$. *Respuesta*: $\frac{2}{3}(b^{3/2} - a^{3/2})$.

Indicación: Véase el ejemplo anterior.

4. $\int_a^b \operatorname{sen} x\,dx$. *Respuesta*: $\cos a - \cos b$.

Indicación. Establézcase previamente la identidad siguiente: $\operatorname{sen} a + \operatorname{sen}(a+h) + \operatorname{sen}(a+2h) + \ldots + \operatorname{sen}[a+(n-1)h] = \dfrac{\cos\left(a + \frac{h}{2}\right) - \cos\left(a + nh - \frac{h}{2}\right)}{2 \operatorname{sen} \frac{h}{2}}$,

para esto es preciso multiplicar y dividir todos los términos del primer miembro por $\operatorname{sen} \frac{h}{2}$ y sustituir el producto de senos por la diferencia de cosenos.

5. $\int_a^b \cos x\,dx$. *Respuesta*: $\operatorname{sen} b - \operatorname{sen} a$.

Utilizando la fórmula de Newton-Leibniz, calcular las integrales definidas:

6. $\int_0^1 x^4\,dx$. *Resp.* $\frac{1}{5}$. **7.** $\int_0^1 e^x\,dx$. *Resp.* $e-1$. **8.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x\,dx$. *Resp.* 1. **9.** $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$. *Resp.* $\frac{\pi}{4}$. **10.** $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. *Resp.* $\frac{\pi}{4}$. **11.** $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg} x\,dx$. *Resp.* $\ln 2$. **12.** $\int_1^e \frac{dx}{x}$. *Resp.* 1. **13.** $\int_1^x \frac{dx}{x}$. *Resp.* $\ln x$. **14.** $\int_0^x \operatorname{sen} x\,dx$. *Resp.* $2\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}$.

15. $\int\limits_{\sqrt[3]{a}}^{x} x^2\,dx$. *Resp.* $\frac{x^3-a}{3}$. 16. $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{2x-1}$. *Res.* $\ln(2x-1)$. 17. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx$. *Resp.* $\frac{\pi}{4}$. 18. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 x\,dx$. *Resp.* $\frac{\pi}{4}$.

Calcular los valores de las integrales siguientes, empleando las sustituciones indicadas de variables:

19. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x\cos^2 x\,dx$, $\cos x = t$. *Resp.* $\frac{1}{3}$. 20. $\int\limits_{0}^{\pi} \frac{dx}{3+2\cos x}$, $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$. *Resp.* $\frac{\pi}{\sqrt{5}}$. 21. $\int\limits_{1}^{4} \frac{x\,dx}{\sqrt{2+4x}}$, $2+4x=t^2$. *Resp.* $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. 22. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$, $x=\operatorname{tg} t$. *Resp.* $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$. 23. $\int\limits_{1}^{5} \frac{\sqrt{x-1}}{x}\,dx$, $x-1=t^2$. *Resp.* $2(2-\operatorname{arctg} 2)$. 24. $\int\limits_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$, $z=\frac{1}{x}$. *Resp.* $\ln\frac{3}{2}$. 25. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\varphi\,d\varphi}{6-5\operatorname{sen}\varphi+\operatorname{sen}^2\varphi}$, $\operatorname{sen}\varphi=t$. *Resp.* $\ln\frac{4}{3}$.

Demostrar que 26. $\int\limits_{0}^{1} x^m(1-x)^n\,dx=\int\limits_{0}^{1} x^n(1-x)^m\,dx\ (m>0,\ n>0)$.

27. $\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx=\int\limits_{a}^{b} f(a+b-x)\,dx$. 28. $\int\limits_{0}^{a} f(x^2)\,dx=\frac{1}{2}\int\limits_{-a}^{a} f(x^2)\,dx$.

Calcular las integrales impropias siguientes:

29. $\int\limits_{0}^{1} \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$. *Resp.* 1. 30. $\int\limits_{0}^{\infty} e^{-x}\,dx$. *Resp.* 1. 31. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{dx}{a^2+x^2}$. *Resp.* $\frac{\pi}{2a}\ (a>0)$. 32. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. *Resp.* $\frac{\pi}{2}$. 33. $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^5}$. *Resp.* $\frac{1}{4}$. 34. $\int\limits_{0}^{1} \ln x\,dx$. *Resp.* -1. 35. $\int\limits_{0}^{\infty} x\operatorname{sen} x\,dx$. *Resp.* La integral diverge. 36. $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$. *Resp.* La integral diverge. 37. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$. *Resp.* π. 38. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$. *Resp.* $\frac{3}{2}$. 39. $\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{x^3}$.

Resp. La integral diverge. **40.** $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$. *Resp.* $\frac{\pi}{2}$. **41.** $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x^4}$. *Resp.* La integral diverge. **42.** $\int\limits_0^{\infty} e^{-ax} \operatorname{sen} bx\, dx$ $(a>0)$. *Resp.* $\frac{b}{a^2-b^2}$. **43.** $\int\limits_0^{\infty} e^{-ax} \cos bx\, dx$ $(a>0)$. *Resp.* $\frac{a}{a^2+b^2}$.

Calcular los valores aproximados de las integrales:

44. $\ln 5 = \int\limits_1^5 \frac{dx}{x}$, según la fórmula de los trapecios y la de Simpson $(n=12)$. *Respuesta:* 1,6182 (según la fórmula de los trapecios); 1,6098 (según la fórmula de Simpson). **45.** $\int\limits_1^{11} x^3\, dx$, según la fórmula de los trapecios y la de Simpson $(n=10)$. *Respuesta:* 3690; 3660. **46.** $\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^3}\, dx$, según la fórmula de los trapecios $(n=6)$. *Respuesta:* 0,8109. **47.** $\int\limits_1^3 \frac{dx}{2x-1}$, según la fórmula de Simpson $(n=4)$. *Respuesta:* 0,8111. **48.** $\int\limits_1^{10} \log_{10} x\, dx$, según la fórmula de los trapecios y la de Simpson $(n=10)$. *Respuesta:* 6,0656; 6,0896.

49. Calcular el valor de π, partiendo de la correlación $\frac{\pi}{4} = \int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ aplicando la fórmula de Simpson $(n=10)$. *Respuesta:* 3,14159.

50. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx$, según la fórmula de Simpson $(n=10)$. *Respuesta:* 1,371.

51. Partiendo de la igualdad $\int\limits_0^{\infty} e^{-\alpha x}\, dx = \frac{1}{\alpha}$, donde $\alpha > 0$, hallar el valor de la integral $\int\limits_0^{\infty} e^{-x} x^n\, dx$, para $n>0$. *Respuesta:* $n!$

52. Partiendo de la igualdad $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+a} = \frac{\pi}{2\sqrt{a}}$, hallar el valor de la integral $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}}$. *Respuesta:* $\frac{\pi}{2} \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n n!}$.

53. Calcular la integral $\int\limits_0^{\infty} \frac{1-e^{-\alpha x}}{xe^x}\,dx$. *Resp.* $\ln(1+\alpha)\ (\alpha > -1)$.

54. Utilizando la igualdad $\int\limits_0^1 x^{n-1}\,dx = \frac{1}{n}$, calcular la integral $\int\limits_0^1 x^{n-1}(\ln x)^k\,dx$. *Resp.*: $(-1)^k \frac{k!}{n^{k+1}}$.

CAPITULO XII

APLICACIONES GEOMETRICAS Y MECANICAS DE LA INTEGRAL DEFINIDA

§ 1. CALCULO DE AREAS EN COORDENADAS RECTANGULARES

Si la función $f(x) \geqslant 0$ está en el segmento $[a, b]$, entonces, como ya es sabido (§ 2, cap. XI), el área del trapecio curvilíneo limitado por la curva $y = f(x)$, el eje Ox y las rectas $x = a$ y $x = b$ (fig. 210) es igual a:

$$Q = \int_a^b f(x)\, dx. \tag{1}$$

Si $f(x) \leqslant 0$ en el segmento $[a, b]$, la integral definida $\int_a^b f(x)\, dx$ es también $\leqslant 0$. Su valor absoluto es igual al área Q del trapecio curvilíneo correspondiente:

$$-Q = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Si $f(x)$ cambia de signo un número finito de veces en el segmento $[a, b]$ entonces, podemos descomponer la integral a lo largo de todo

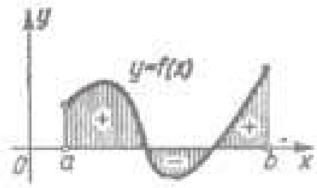

Fig. 228

el segmento $[a, b]$ en la suma de integrales en los segmentos parciales. La integral es positiva en los segmentos donde $f(x) \geqslant 0$, y negaeiva en los segmentos donde $f(x) \leqslant 0$. La integral a lo largo de todo tl segmento representa la diferencia de las áreas dispuestas por arriba y por debajo del eje Ox (fig. 228). Para obtener ordinariamente la suma de las áreas, es preciso hallar la suma de los valores absolutos de las integrales en los segmentos parciales indicados o calcular la integral:

$$Q=\int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Ejemplo 1. Calcular el área Q, limitada por la sinusoide $y=\operatorname{sen} x$ y el eje Ox, para $0\leqslant x\leqslant 2\pi$ (fig. 229).

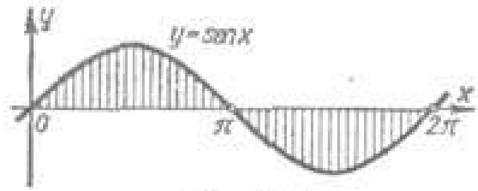

Fig. 229

Solución. Puesto que $\operatorname{sen} x\geqslant 0$ para $0\leqslant x\leqslant\pi$, y $\operatorname{sen} x\leqslant 0$ para $\pi<$ $<x\leqslant 2\pi$ entonces:

$$Q=\int_0^{\pi}\operatorname{sen} x\,dx+\left|\int_{\pi}^{2\pi}\operatorname{sen} x\,dx\right|=\int_0^{2\pi}|\operatorname{sen} x|\,dx,$$

$$\int_0^{\pi}\operatorname{sen} x\,dx=-\cos x\Big|_0^{\pi}=-(\cos\pi-\cos 0)=-(-1-1)=2,$$

$$\int_{\pi}^{2\pi}\operatorname{sen} x\,dx=-\cos x\Big|_{\pi}^{2\pi}=-(\cos 2\pi-\cos\pi)=-2.$$

Por tanto,

$$Q=2+|-2|=4.$$

Si es preciso calcular el área limitada por las curvas $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$ y las ordenadas $x=a$, $x=b$, a condición de que $f_1(x)\geqslant$ $\geqslant f_2(x)$ obtenemos (fig. 230):

$$Q=\int_a^b f_1(x)\,dx-\int_a^b f_2(x)\,dx=\int_a^b [f_1(x)-f_2(x)]\,dx. \tag{2}$$

Ejemplo 2. Calcular el área limitada por las curvas (fig. 231)

$$y=\sqrt{x}\ \text{ e }\ y=x^2.$$

Solución. Hallemos los puntos de intersección de las curvas: $\sqrt{x}=x^2$; $x=x^4$, de donde: $x_1=0$, $x_2=1$.

Por tanto,

$$Q=\int_0^1\sqrt{x}\,dx-\int_0^1 x^2\,dx=\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)\,dx=\frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_0^1-\frac{x^3}{3}\Big|_0^1=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}.$$

Calculemos ahora el área de un trapecio curvilíneo limitada por la curva dada por ecuaciones paramétricas (fig. 232):

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \tag{3}$$

donde:

$$\alpha \leqslant t \leqslant \beta, \quad \text{y} \quad \varphi(\alpha) = a, \quad \varphi(\beta) = b.$$

Supongamos que las ecuaciones (3) definen cierta función $y = f(x)$ en el segmento $[a, b]$ y, por tanto, el área del trapecio cur-

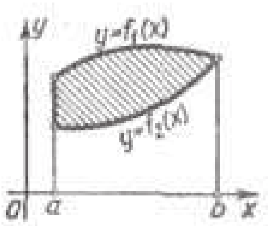

Fig. 230

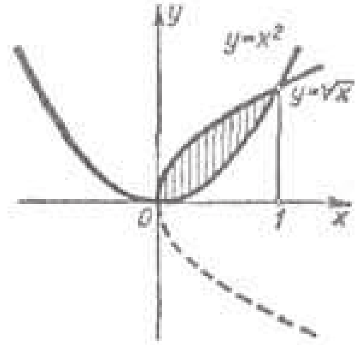

Fig. 231

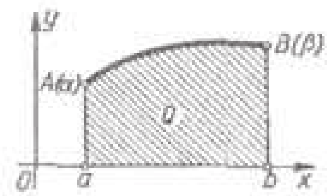

Fig. 232

vilíneo puede ser calculada según la fórmula:

$$Q = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b y\,dx.$$

Sustituyamos en esta integral la variable: $x = \varphi(t)$; $dx = \varphi'(t)\,dt$. En virtud de las ecuaciones (3) obtenemos: $y = f(x) = f[\varphi(t)] = \psi(t)$. Por consiguiente,

$$Q = \int_\alpha^\beta \psi(t)\,\varphi'(t)\,dt. \tag{4}$$

Esta es la fórmula para calcular el área de un trapecio curvilíneo, limitada por una curva dada en coordenadas paramétricas.

Ejemplo 3. Calcular el área de un campo limitado por la elipse:

$$x = a\cos t, \quad y = b \operatorname{sen} t.$$

Solución. *Calculemos el área de la mitad superior de la elipse y dupliquémosla.* La variable x varía desde $-a$ hasta $+a$, por tanto, t varía desde π hasta 0, $Q = 2\int_\pi^0 (b \operatorname{sen} t)(-a \operatorname{sen} t\,dt) = -2ab\int_\pi^0 \operatorname{sen}^2 t\,dt =$

$$= 2ab\int_0^\pi \operatorname{sen}^2 t\,dt = 2ab\int_0^\pi \frac{1-\cos 2t}{2}\,dt = 2ab\left[\frac{t}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2t}{4}\right]_0^\pi = \pi ab.$$

Ejemplo 4. Calcular el área limitada por el eje Ox y un arco de la cicloide $x=a(t-\operatorname{sen} t)$, $y=a(1-\cos t)$.

Solución. Puesto que t varía desde 0 hasta 2π, x varía desde 0 hasta $2\pi a$. Según la fórmula (4), tenemos:

$$Q=\int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\,a(1-\cos t)\,dt=a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2\,dt=$$

$$=a^2\left[\int_0^{2\pi} dt-2\int_0^{2\pi}\cos t\,dt+\int_0^{2\pi}\cos^2 t\,dt\right];$$

$$\int_0^{2\pi} dt=2\pi;\quad \int_0^{2\pi}\cos t\,dt=0;\quad \int_0^{2\pi}\cos^2 t\,dt=\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt=\pi.$$

Finalmente obtenemos

$$Q=a^2(2\pi+\pi)=3\pi a^2.$$

§ 2. AREA DE UN SECTOR CURVILINEO EN COORDENADAS POLARES

Sea $\rho=f(\theta)$ la ecuación de una curva en coordenadas polares, donde $f(\theta)$ es una función continua para $\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$.

Determinemos el área del sector OAB, limitada por la curva $\rho=f(\theta)$ y los radios vectores $\theta=\alpha$ y $\theta=\beta$.

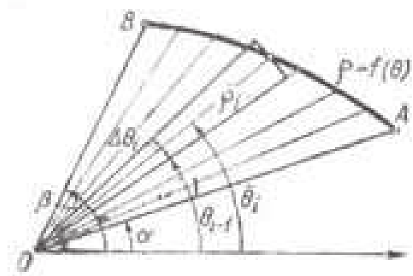

Fig. 233

Dividamos el área dada en n partes mediante los radios vectores $\theta_0=\alpha$, $\theta=\theta_1$, . . ., $\theta_n=\beta$. Designemos por $\Delta\theta_1$, $\Delta\theta_2$, . . ., $\Delta\theta_n$ los ángulos formados por los radios vectores trazados (fig. 233).

Sea $\bar\rho_i$ la longitud de un radio vector correspondiente a un ángulo $\bar\theta_i$ cualquiera, comprendido entre θ_{i-1} y θ_i.

Examinemos el sector circular de radio $\bar\rho_i$ y ángulo central $\Delta\theta_i$. Su área es igual a:

$$\Delta Q_i=\frac{1}{2}\bar\rho_i^2\,\Delta\theta_i.$$

La suma

$$Q_n = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \bar{\rho}_i^2 \, \Delta\theta_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} [f(\bar{\theta}_i)]^2 \, \Delta\theta_i$$

da el área del sector «escalonado». Puesto que la suma indicada es una suma integral para la función $\rho^2 = [f(\theta)]^2$ en el segmento $\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$,

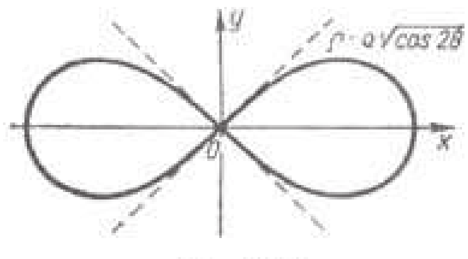

Fig. 234

su límite para máx $\Delta\theta_i \to 0$ es la integral definida

$$\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2 \, d\theta.$$

Esta integral no depende de un radio vector $\bar{\rho}_i$ elegido dentro del ángulo $\Delta\theta_i$. Es natural, considerar este límite como el área buscada de la figura *).

Así, el área del sector OAB es igual a:

$$Q = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2 \, d\theta \tag{1}$$

ó

$$Q = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} [f(\theta)]^2 \, d\theta. \tag{1'}$$

Ejemplo. Calcular el área limitada por la lemniscata (fig. 234).

$$\rho = a\sqrt{\cos 2\theta}.$$

*) Se puede demostrar que esta definición del área no contradice a la dada anteriormente: en otras palabras, calculando el área del sector curvilíneo mediante los trapecios curvilíneos, obtenemos el mismo resultado.

Solución. El radio vector describe la cuarta parte del área buscada cuando θ varía desde 0 hasta $\pi/4$:

$$\frac{1}{4}Q=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}\rho^2\,d\theta=\frac{1}{2}a^2\int_0^{\pi/4}\cos 2\theta\,d\theta=\frac{a^2}{2}\left.\frac{\operatorname{sen}2\theta}{2}\right|_0^{\pi/4}=\frac{a^2}{2},$$

por tanto, $Q=a^2$.

§ 3. LONGITUD DE UN ARCO DE CURVA

1. Longitud de un arco de curva en coordenadas rectangulares. Sea $y=f(x)$ la ecuación de una curva plana en coordenadas rectangulares.

Encontremos la longitud del arco AB de esta curva, comprendida entre las rectas verticales $x=a$ y $x=b$ (fig. 235).

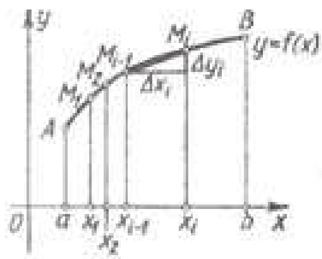

Fig. 235

En el capítulo VI (§ 1) hemos dado la definición de la longitud de un arco. Recordémosla. Tomemos en el arco AB los puntos A, M_1, M_2, . . ., M_i, . . ., B cuyas abscisas son, respectivamente, $x_0=a$, x_1, x_2, . . ., x_i, . . ., $b=x_n$. Tracemos las cuerdas AM_1, M_1M_2, . . ., $M_{n-1}B$, cuyas longitudes designamos respectivamente por Δs_1, Δs_2, . . ., Δs_n. Obtenemos una linea quebrada AM_1M_2 . . . . . . $M_{n-1}B$ inscrita en el arco $\widehat{AB}$. La longitud de esta quebrada es igual a

$$s_n=\sum_{i=1}^{n}\Delta s_i.$$

El límite al cual tiende la longitud de la quebrada inscrita, cuando la longitud de su eslabón más grande tiende a cero, se llama *longitud s del arco AB*

$$s=\lim_{\text{máx}\,\Delta s_i\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Delta s_i. \tag{1}$$

Demostremos, ahora, que si la función $f(x)$ y su derivada $f'(x)$ son continuas en el segmento $a\leqslant x\leqslant b$, este límite existe. Al mismo tiempo obtenemos el método para calcular la longitud de un arco.

Introduzcamos la designación:

$$\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1}).$$

Entonces:

$$\Delta s_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\,\Delta x_i.$$

Según el teorema de Lagrange tenemos:

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f'(\xi_i),$$

donde $x_{i-1} < \xi_i < x_i$. Por consiguiente,

$$\Delta s_i = \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2}\,\Delta x_i.$$

De este modo, la longitud de la línea quebrada inscrita es

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2}\,\Delta x_i.$$

Según la hipótesis $f'(x)$ es continua, por consiguiente, la función $\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ también es continua. Por eso, la suma integral escrita tiene un límite igual a la integral definida:

$$s = \lim_{\text{máx}\,\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2}\,\Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx.$$

Así, hemos obtenido la fórmula para calcular la longitud de un arco:

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx. \qquad (2)$$

Observación. Partiendo de la última fórmula, se puede obtener la derivada de la longitud del arco respecto a la abscisa. Considerando que el límite superior de integración es variable y designándolo por x (sin cambiar la variable de integración), obtenemos la longitud del arco s en función de x:

$$s(x) = \int_a^x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx.$$

Derivando esta integral respecto al límite superior, obtenemos:

$$\frac{ds}{dx}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}. \tag{3}$$

Hemos obtenido ya esta fórmula en el § 1, cap. VI, partiendo de otras hipótesis.

Ejemplo 1. Hallar la longitud de la circunferencia

$$x^2+y^2=r^2.$$

Solución. Calculemos primero la longitud de la cuarta parte de la circunferencia situada en el primer cuadrante. La ecuación del arco AB es:

$$y=\sqrt{r^2-x^2},\ \text{de donde:}\ \frac{dy}{dx}=-\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}.$$

Por tanto,

$$\frac{1}{4}s=\int_0^r\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}\,dx=\int_0^r\frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}\,dx=r\,\text{arcsen}\,\frac{x}{r}\Big|_0^r=r\,\frac{\pi}{2}.$$

La longitud de toda la circunferencia es $s=2\pi r$.

Hallemos ahora la longitud de un arco de curva, en el caso en que la curva está dada por ecuaciones paramétricas:

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t)\quad(\alpha\leqslant t\leqslant\beta), \tag{4}$$

donde, $\varphi(t)$ y $\psi(t)$ son funciones continuas que tienen derivadas continuas, sin que $\varphi'(t)$ se anula en el segmento dado.

En este caso, las ecuaciones (4) determinan cierta función $y=f(x)$ continua, que tiene también derivada continua:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

Sea $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$. Realicemos la sustitución en la integral (2)

$$x=\varphi(t),\quad dx=\varphi'(t)\,dt,$$

obtenemos:

$$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{1+\left[\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right]^2}\,\varphi'(t)\,dt,$$

o, en definitiva:

$$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt. \tag{5}$$

Observación 2. Se puede demostrar que la fórmula (5) conserva su validez también para las curvas que son cortadas por rectas verticales en más de un punto (en particular, para las curvas cerradas) a condición de que ambas derivadas $\varphi'(t)$ y $\psi'(t)$ sean continuas en todos los puntos de la curva.

Ejemplo 2. Calcular la longitud de la hipocicloide (astroide):

$$x = a\cos^3 t, \quad y = a\,\mathrm{sen}^3\, t.$$

Solución. Puesto que la curva es simétrica respecto a los dos ejes de coordenadas, calculemos, al principio, la longitud del segmento de esta curva dispuesta en el primer cuadrante. Hallamos:

$$\frac{dx}{dt} = -3a\cos^2 t\,\mathrm{sen}\, t, \quad \frac{dy}{dt} = 3a\,\mathrm{sen}^2\, t\cos t.$$

El parámetro t variará desde 0 hasta $\frac{\pi}{2}$.

Por tanto,

$$\frac{1}{4}s = \int_0^{\pi/2} \sqrt{9a^2\cos^4 t\,\mathrm{sen}^2\, t + 9a^2\,\mathrm{sen}^4\, t\cos^2 t}\,dt = 3a\int_0^{\pi/2}\sqrt{\cos^2 t\,\mathrm{sen}^2\, t}\,dt =$$

$$= 3a\int_0^{\pi/2}\mathrm{sen}\, t\cos t\,dt = 3a\left.\frac{\mathrm{sen}^2\, t}{2}\right|_0^{\pi/2} = \frac{3a}{2}; \quad s = 6a.$$

Observación 3. Si tenemos una curva en el espacio, dada por ecuaciones paramétricas

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t), \tag{6}$$

donde, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ (véase § 1, cap. IX), la longitud de su arco se determina (igual que para un arco plano) como el límite al cual tiende la longitud de la línea quebrada inscrita, cuando la longitud de su eslabón más grande tienda a cero. Si las funciones $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ son continuas y tienen derivadas continuas en el segmento $[\alpha, \beta]$, entonces la curva tiene una longitud determinada (es decir, existe el límite indicado arriba para esta curva) que se calcula según la fórmula:

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\chi'(t)]^2}\,dt. \tag{7}$$

Admitamos el último resultado sin demostración.

Ejemplo 3. Calcular la longitud del arco de hélice $x = a\cos t$, $y = a\,\mathrm{sen}\, t$, $z = amt$, al variar t desde 0 hasta 2π.

Solución. De las ecuaciones dadas, hallamos:

$$dx = -a\,\mathrm{sen}\, t\,dt, \quad dy = a\cos t\,dt, \quad dz = am\,dt.$$

Observación 2. Se puede demostrar que la fórmula (5) conserva su validez también para las curvas que son cortadas por rectas verticales en más de un punto (en particular, para las curvas cerradas) a condición de que ambas derivadas $\varphi'(t)$ y $\psi'(t)$ sean continuas en todos los puntos de la curva.

Ejemplo 2. Calcular la longitud de la hipocicloide (astroide):

$$x=a\cos^3 t,\quad y=a\,\mathrm{sen}^3\, t.$$

Solución. Puesto que la curva es simétrica respecto a los dos ejes de coordenadas, calculemos, al principio, la longitud del segmento de esta curva dispuesta en el primer cuadrante. Hallamos:

$$\frac{dx}{dt}=-3a\cos^2 t\,\mathrm{sen}\, t,\quad \frac{dy}{dt}=3a\,\mathrm{sen}^2 t\cos t.$$

El parámetro t variará desde 0 hasta $\frac{\pi}{2}$.

Por tanto,

$$\frac{1}{4}s=\int_0^{\pi/2}\sqrt{9a^2\cos^4 t\,\mathrm{sen}^2 t+9a^2\,\mathrm{sen}^4 t\cos^2 t}\,dt=3a\int_0^{\pi/2}\sqrt{\cos^2 t\,\mathrm{sen}^2 t}\,dt=$$

$$=3a\int_0^{\pi/2}\mathrm{sen}\, t\cos t\,dt=3a\left.\frac{\mathrm{sen}^2 t}{2}\right|_0^{\pi/2}=\frac{3a}{2};\quad s=6a.$$

Observación 3. Si tenemos una curva en el espacio, dada por ecuaciones paramétricas

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t),\quad z=\chi(t),\tag{6}$$

donde, $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ (véase § 1, cap. IX), la longitud de su arco se determina (igual que para un arco plano) como el límite al cual tiende la longitud de la línea quebrada inscrita, cuando la longitud de su eslabón más grande tienda a cero. Si las funciones $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ son continuas y tienen derivadas continuas en el segmento $[\alpha, \beta]$, entonces la curva tiene una longitud determinada (es decir, existe el límite indicado arriba para esta curva) que se calcula según la fórmula:

$$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2+[\chi'(t)]^2}\,dt.\tag{7}$$

Admitamos el último resultado sin demostración.

Ejemplo 3. Calcular la longitud del arco de hélice $x=a\cos t$, $y=a\,\mathrm{sen}\, t$, $z=amt$, al variar t desde 0 hasta 2π.

Solución. De las ecuaciones dadas, hallamos:

$$dx=-a\,\mathrm{sen}\, t\,dt,\quad dy=a\cos t\,dt,\quad dz=am\,dt.$$

Poniendo estas expresiones en la fórmula (7), obtenemos:

$$s=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\operatorname{sen}^2 t+a^2\cos^2 t+a^2m^2}\,dt=a\int_0^{2\pi}\sqrt{1+m^2}\,dt=2\pi a\sqrt{1+m^2}.$$

2. La longitud de un arco de curva en coordenadas polares. Sea

$$\rho=f(\theta) \tag{8}$$

la ecuación de una curva dada en coordenadas polares, donde ρ es el radio polar y θ es el ángulo polar.

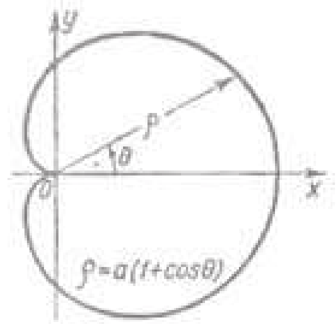

Fig. 236

Escribamos las fórmulas para pasar de coordenadas polares a cartesianas

$$x=\rho\cos\theta,\quad y=\rho\operatorname{sen}\theta.$$

Al sustituir ρ por su expresión (8), en función de θ obtenemos las ecuaciones:

$$x=f(\theta)\cos\theta,\quad y=f(\theta)\operatorname{sen}\theta.$$

Estas ecuaciones se pueden considerar como las ecuaciones paramétricas de la curva y aplicar la fórmula (5) para el cálculo de la longitud del arco.

Hallemos, para esto, las derivadas de x e y respecto al parámetro θ:

$$\frac{dx}{d\theta}=f'(\theta)\cos\theta-f(\theta)\operatorname{sen}\theta;\qquad \frac{dy}{d\theta}=f'(\theta)\operatorname{sen}\theta+f(\theta)\cos\theta.$$

Entonces,

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2=[f'(\theta)]^2+[f(\theta)]^2=\rho'^2+\rho^2.$$

Por consiguiente,

$$s=\int_{\theta_0}^{\theta}\sqrt{\rho'^2+\rho^2}\,d\theta.$$

Poniendo estas expresiones en la fórmula (7), obtenemos:

$$s=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\operatorname{sen}^2 t+a^2\cos^2 t+a^2m^2}\,dt=a\int_0^{2\pi}\sqrt{1+m^2}\,dt=2\pi a\sqrt{1+m^2}.$$

2. La longitud de un arco de curva en coordenadas polares. Sea

$$\rho=f(\theta) \tag{8}$$

la ecuación de una curva dada en coordenadas polares, donde ρ es el radio polar y θ es el ángulo polar.

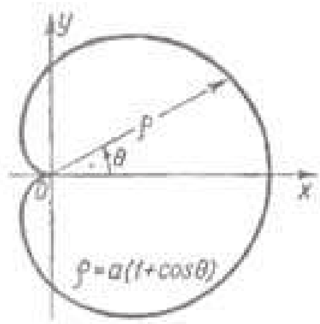

Fig. 236

Escribamos las fórmulas para pasar de coordenadas polares a cartesianas

$$x=\rho\cos\theta,\quad y=\rho\operatorname{sen}\theta.$$

Al sustituir ρ por su expresión (8), en función de θ obtenemos las ecuaciones:

$$x=f(\theta)\cos\theta,\quad y=f(\theta)\operatorname{sen}\theta.$$

Estas ecuaciones se pueden considerar como las ecuaciones paramétricas de la curva y aplicar la fórmula (5) para el cálculo de la longitud del arco.

Hallemos, para esto, las derivadas de x e y respecto al parámetro θ:

$$\frac{dx}{d\theta}=f'(\theta)\cos\theta-f(\theta)\operatorname{sen}\theta;\qquad \frac{dy}{d\theta}=f'(\theta)\operatorname{sen}\theta+f(\theta)\cos\theta.$$

Entonces,

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2=[f'(\theta)]^2+[f(\theta)]^2=\rho'^2+\rho^2.$$

Por consiguiente,

$$s=\int_{\theta_0}^{\theta}\sqrt{\rho'^2+\rho^2}\,d\theta.$$

Ejemplo 4. Hallar la longitud de la cardioide

$$\rho = a\,(1+\cos\theta) \text{ (fig. 236).}$$

Al variar el ángulo θ desde 0 hasta π, obtenemos la mitad de la longitud buscada. Aquí $\rho' = -a \operatorname{sen}\theta$. Por tanto,

$$s = 2\int_0^{\pi} \sqrt{a^2(1+\cos\theta)^2 + a^2 \operatorname{sen}^2\theta}\, d\theta =$$

$$= 2a\int_0^{\pi} \sqrt{2+2\cos\theta}\, d\theta = 4a\int_0^{\pi} \cos\frac{\theta}{2}\, d\theta = 8a \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\Big|_0^{\pi} = 8a.$$

Ejemplo 5. Calcular la longitud de la elipse

$$\left.\begin{array}{l} x = a\cos t \\ y = b \operatorname{sen} t \end{array}\right\} \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi,$$

suponiendo que $a > b$.

Solución. Para el cálculo utilicemos la fórmula (5). Calculemos al principio la cuarta parte del arco, es decir, la longitud del arco que corresponde al cambio del parámetro desde $t = 0$ hasta $t = \frac{\pi}{2}$:

$$\frac{s}{4} = \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 t + b^2\cos^2 t}\, dt =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2(1-\cos^2 t) + b^2\cos^2 t}\, dt = \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2-(a^2-b^2)\cos^2 t}\, dt =$$

$$= a\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\frac{a^2-b^2}{a^2}\cos^2 t}\, dt = a\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2\cos^2 t}\, dt,$$

donde, $k = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} < 1$. Por lo tanto,

$$s = 4a\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2\cos^2 t}\, dt.$$

Ahora nos queda solamente calcular la última integral. Pero como se sabe, esta integral no se expresa mediante las funciones elementales (véase § 16, cap. X) y se puede calcularla únicamente por medio de los métodos aproximados (por ejemplo, según la fórmula de Simpson).

En particular, si el semieje mayor de la elipse es igual a 5, y el semieje menor es igual a 4, entonces, $k = 3/5$; y la longitud de la elipse será $s = 4\cdot 5 \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2\cos^2 t}\, dt.$

Calculando la última integral según la fórmula de Simpson $\left(\text{dividiendo el segmento } \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ en cuatro partes}\right)$, obtenemos el valor aproximado de la integral:

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\frac{3}{5}\cos^2 t}\, dt \approx 1{,}298,$$

y, por consiguiente, la longitud del arco de toda la elipse es aproximadamente igual a:

$$s = \approx 25{,}96 \text{ unidades de longitud.}$$

§ 4. CALCULO DEL VOLUMEN DE UN CUERPO EN FUNCION DE LAS AREAS DE SECCIONES PARALELAS

Dado un cuerpo T, supongamos que se conoce el área de toda sección arbitraria de este cuerpo por un plano perpendicular al eje Ox (fig. 237). Este área depende de la posición del plano secante, es decir, es función de x:

$$Q = Q(x).$$

Supongamos que $Q(x)$ es una función continua de x, y determinemos el volumen del cuerpo dado.

Tracemos los planos $x = x_0 = a$, $x = x_1$, $x = x_2$, . . ., $x = x_n = b$.

Estos planos dividen el cuerpo en capas. En cada intervalo parcial $x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i$, elijamos un punto arbitrario ξ_i y para cada valor

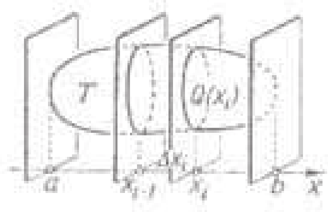

Fig. 237

de $i = 1, 2, \ldots, n$ construyamos un cuerpo cilíndrico cuya generatriz sea paralela al eje Ox, y la directriz represente el contorno de la sección del cuerpo T por el plano $x = \xi_i$.

El volumen de tal cilindro elemental, con el área de la base igual a $Q(\xi_i)$ $(x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i)$, y la altura Δx_i es igual a $Q(\xi_i)\,\Delta x_i$. El volumen de todos los cilindros es:

$$v_n = \sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i)\,\Delta x.$$

El límite de esta suma (si este límite existe), cuando máx $\Delta x_i \to \to 0$, se llama volumen del cuerpo dado:

$$v = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i)\, \Delta x_i .$$

Puesto que v_n representa, evidentemente, la suma integral para una función continua $Q(x)$ en el segmento $a \leqslant x \leqslant b$, entonces el

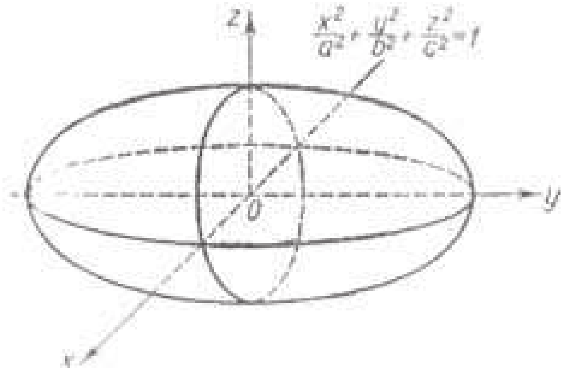

Fig. 238

límite indicado existe y se expresa por la integral definida:

$$v = \int_a^b Q(x)\, dx. \tag{1}$$

Ejemplo. Calcular el volumen de un elipsoide de tres ejes (fig. 238)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Solución. La sección del elipsoide cortado por un plano paralelo al plano Oyz que se encuentra a la distancia x de este último da una elipse

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}, \quad \frac{y^2}{\left[b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right]^2} + \frac{z^2}{\left[c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right]^2} = 1,$$

sus semiejes son:

$$b_1 = b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}; \quad c_1 = c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}.$$

Pero el área de tal elipse es igual a $\pi b_1 c_1$ (véase el ejemplo 3 § 2).

Por eso,

$$Q(x) = \pi bc\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right).$$

De donde el volumen del elipsoide es igual a:

$$v=\pi bc\int_{-a}^{a}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=\pi bc\left(x-\frac{x^3}{3a^2}\right)\Big|_{-a}^{a}=\frac{4}{3}\pi abc.$$

En particular, si $a=b=c$, el elipsoide se transforma en una esfera, y en este caso, obtenemos:

$$v=\frac{4}{3}\pi a^3.$$

§ 5. VOLUMEN DE UN CUERPO DE REVOLUCION

Estudiemos el cuerpo de revolución engendrado por la rotación del trapecio curvilíneo $aABb$ alrededor del eje Ox. El trapecio está limitado por la curva $y=f(x)$, el eje Ox y las rectas $x=a$, $x=b$.

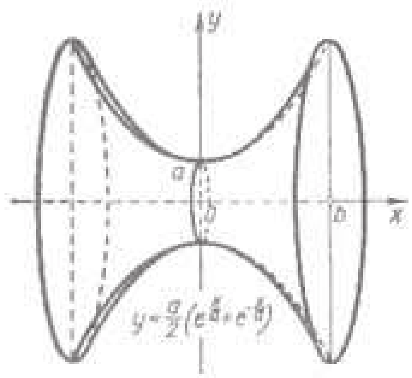

Fig. 239

En este caso, toda sección arbitraria del cuerpo, cortado por un plano perpendicular al eje de abscisas, es un círculo cuyo área es:

$$Q=\pi y^2=\pi\,[f(x)]^2.$$

Aplicando la fórmula general para el cálculo de los volúmenes [(1), § 4], obtenemos la fórmula para calcular el volumen del **cuerpo de revolución:**

$$v=\pi\int_a^b y^2dx=\pi\int_a^b\left[\,f(x)\,\right]^2dx.$$

Ejemplo. Hallar el volumen del cuerpo engendrado por la revolución de una catenaria

$$y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

alrededor del eje Ox, en el intervalo desde $x=0$ hasta $x=b$ (fig. 239).

Solución.

$$v=\pi\frac{a^2}{4}\int_0^b\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)^2dx=\frac{\pi a^2}{4}\int_0^b\left(e^{\frac{2x}{a}}+2+e^{-\frac{2x}{a}}\right)dx=$$

$$=\frac{\pi a^2}{4}\left[\frac{a}{2}e^{\frac{2x}{a}}+2x-\frac{a}{2}e^{-\frac{2x}{a}}\right]_0^b=\frac{\pi a^3}{8}\left(e^{\frac{2b}{a}}-e^{-\frac{2b}{a}}\right)+\frac{\pi a^2 b}{2}.$$

§ 6. AREA DE UN CUERPO DE REVOLUCION

Sea una superficie engendrada por la revolución de la curva $y=f(x)$ alrededor del eje Ox; hallemos el área de esta superficie en el intervalo $a\leqslant x\leqslant b$. Supongamos que la función $f(x)$ es continua y tiene derivada continua en todos los puntos del segmento $[a, b]$.

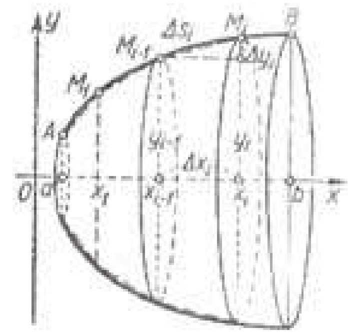

Fig. 240

Igual que en el § 3, tracemos las cuerdas AM_1, M_1M_2, ..., $M_{n-1}B$, cuyas longitudes designamos por Δs_1, Δs_2, ..., Δs_n (fig. 240).

En su rotación cada cuerda de longitud Δs_i $(i=1, 2, \ldots n)$ describe un cono truncado, cuya superficie ΔP_i es igual a

$$\Delta P_i=2\pi\frac{y_{i-1}+y_i}{2}\Delta s_i.$$

Pero,

$$\Delta s_i=\sqrt{\Delta x_i^2+\Delta y_i^2}=\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\,\Delta x_i.$$

Aplicando el teorema de Lagrange, obtenemos:

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}=\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}}=f'(\xi_i),\text{ donde } x_{i-1}<\xi_i<x_i;$$

por consiguiente,

$$\Delta s_i = \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\, \Delta x_i,$$

$$\Delta P_i = 2\pi \frac{y_{i-1} + y_i}{2} \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\, \Delta x_i.$$

La superficie descrita por la línea quebrada es igual a la suma

$$P_n = 2\pi \sum_{i=1}^{n} \frac{y_{i-1} + y_i}{2} \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\, \Delta x_i,$$

o a la suma

$$P_n = \pi \sum_{i=1}^{n} [f(x_{i-1}) + f(x_i)] \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\, \Delta x_i, \tag{1}$$

que se extiende a todos los eslabones de la línea quebrada. El límite de esta suma, cuando el eslabón más grande de la línea quebrada Δs_i tiende a cero se *llama área de la superficie de revolución.*

La suma (1) no es una suma integral para la función

$$2\pi f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2}, \tag{2}$$

puesto que en el sumando, correspondiente al segmento $[x_{i-1}, x_i]$, figuran unos cuantos puntos de este segmento: x_{i-1}, x_i, ξ_i. Sin embargo, se puede demostrar que el límite de la suma (1) es igual al de la suma integral para la función (2), es decir,

$$P = \lim_{\text{máx } \Delta x_i \to 0} \pi \sum_{i=1}^{n} [f(x_{i-1}) + f(x_i)] \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\, \Delta x_i =$$

$$= \lim_{\text{máx } \Delta x_i \to 0} \pi \sum_{i=1}^{n} 2f(\xi_i) \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\, \Delta x_i$$

ó

$$P = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx. \tag{3}$$

Ejemplo. Determinar la superficie del paraboloide, engendrada por la revolución alrededor del eje Ox de un arco de la parábola $y^2 = 2px$, correspondiente a la variación de x desde $x = 0$ hasta $x = a$:

$$y = \sqrt{2px}, \quad y' = \frac{\sqrt{2p}}{2\sqrt{x}}, \quad \sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{1 + \frac{2p}{4x}} = \sqrt{\frac{2x + p}{2x}}.$$

Solución. Según la fórmula (3) obtenemos:

$$P=2\pi\int_0^a\sqrt{2px}\sqrt{\frac{2x+p}{2x}}\,dx=2\pi\sqrt{p}\int_0^a\sqrt{2x+p}\,dx=$$

$$=2\pi\sqrt{p}\,\frac{2}{3}\,(2x+p)^{3/2}\,\frac{1}{2}\Big|_0^a=\frac{2\pi\sqrt{p}}{3}\,[(2a+p)^{3/2}-p^{3/2}].$$

§ 7. CALCULO DEL TRABAJO CON AYUDA DE LA INTEGRAL DEFINIDA

Supongamos que, bajo el efecto de una fuerza F, el punto material M se desplaza a lo largo de la recta Os, y la dirección de la fuerza coincide con la del movimiento. Es preciso determinar el trabajo producido por la fuerza F, para desplazar el punto M de la posición $s=a$ a la posición $s=b$.

1) Si la fuerza F es constante, el trabajo A se expresará como el producto de la fuerza F por el camino recorrido:

$$A=F\,(b-a).$$

2) Supongamos que la fuerza F varía continuamente en función de la posición del punto material, es decir, representa una función $F\,(s)$, continua en el segmento $a\leqslant s\leqslant b$.

Dividamos el segmento $[a,\ b]$ en n partes arbitrarias de longitudes

$$\Delta s_1,\ \Delta s_2,\ \ldots,\ \Delta s_n.$$

Elijamos, ahora, en cada segmento parcial $[s_{i-1},\ s_i]$ un punto arbitrario ξ_i, y sustituyamos el trabajo de la fuerza $F\,(s)$ en el camino Δs_i $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ por el producto

$$F\,(\xi_i)\,\Delta s_i.$$

Esto significa que dentro de los límites de cada segmento parcial admitimos la fuerza F como constante es decir, $F=F\,(\xi_i)$. En tal caso la expresión $F\,(\xi_i)\,\Delta s_i$, para Δs_i suficientemente pequeño, dará un valor aproximado del trabajo de la fuerza F en el camino Δs_i, y la suma

$$A_n=\sum_{i=1}^{n}F\,(\xi_i)\,\Delta s_i$$

será la expresión aproximada del trabajo de la fuerza F en todo el segmento $[a,\ b]$.

Es evidente que A_n representa una suma integral formada para la función $F=F\,(s)$ en el segmento $[a,\ b]$. El límite de esta suma, para máx $(\Delta s_i)\rightarrow 0$, existe y expresa el trabajo de la fuerza $F\,(s)$

en el camino desde el punto $s = a$ hasta el $s = b$:

$$A = \int_a^b F(s)\,ds \qquad (1)$$

Ejemplo 1. La compresión S de un muelle helicoidal es proporcional a la fuerza aplicada F. Calcular el trabajo de la fuerza F al comprimir el muelle 5 cm, si es preciso aplicar una fuerza de 1 kg para comprimirlo 1 cm (fig. 241).

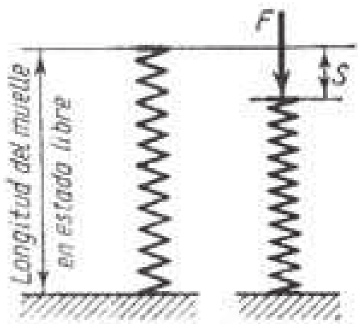

Fig. 241

Solución. Según la hipótesis, la fuerza F y el desplazamiento S están ligados por la dependencia $F = kS$, donde k es una constante. Expresemos S en metros, y F en kilogramos. Si $S = 0{,}01$ entonces $F = 1$, es decir, $1 = k \cdot 0{,}01$, de donde: $k = 100$, $F = 100S$.

En virtud de la fórmula (1) tenemos:

$$A = \int_0^{0,05} 100S\,dS = 100\,\frac{S^2}{2}\Big|_0^{0,05} = 0{,}125 \text{ kgm}.$$

Ejemplo 2. La fuerza F, de repulsión entre dos cargas eléctricas e_1 y e_2 del mismo signo, dispuestas a una distancia r, se expresa mediante la fórmula

$$F = k\,\frac{e_1 e_2}{r^2}$$

donde k es una constante.

Determinar el trabajo de la fuerza F para desplazar la carga e_2 desde el punto A_1, que se encuentra a la distancia r_1 de la carga e_1, al punto A_2 que se halla a la distancia r_2 de e_1. Supongamos que la carga e_1 se encuentra en el punto A_0, tomado por origen.

Solución. Según la fórmula (1) tenemos:

$$A = \int_{r_1}^{r_2} k\,\frac{e_1 e_2}{r^2}\,dr = -ke_1e_2\,\frac{1}{r}\Big|_{r_1}^{r_2} = ke_1e_2\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

Para $r_2 = \infty$, obtenemos:

$$A = \int_{r_1}^{\infty} \frac{ke_1e_2}{r^2}\,dr = \frac{ke_1e_2}{r_1}.$$

Para $e_2 = 1$, tenemos $A = k\,\frac{e_1}{r}$. La última magnitud se llama *potencial del campo* creado por la carga e_1.

§ 8. COORDENADAS DEL CENTRO DE GRAVEDAD

Sea dado en el plano Oxy un sistema de los puntos materiales

$$P_1(x_1, y_1); \quad P_2(x_2, y_2), \ldots, P_n(x_n, y_n),$$

cuyas masas son $m_1, m_2, \ldots, m_n$, respectivamente.

Los productos $x_i m_i$ e $y_i m_i$ se llaman *momentos estáticos* de la masa m_1 respecto a los ejes Oy y Ox.

Designemos por x_c e y_c las coordenadas del centro de gravedad del sistema dado. Como es sabido por el curso de mecánica, las coordenadas del centro de gravedad del dicho sistema de puntos materiales se determinan por las fórmulas:

$$x_c = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \ldots + x_n m_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}, \tag{1}$$

$$y_c = \frac{y_1 m_1 + y_2 m_2 + \ldots + y_n m_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}. \tag{2}$$

Utilicemos estas fórmulas, para buscar los centros de gravedad de diversos cuerpos y figuras.

1. Centro de gravedad de una curva plana. Supongamos que la ecuación $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$ define una curva material AB.

Sea γ la densidad *) lineal de esta curva material. Dividamos la curva en n partes de longitudes $\Delta s_1, \Delta s_2, \ldots, \Delta s_n$. Las masas de estas partes serán iguales a los productos de sus longitudes por la densidad (constante): $\Delta m_i = \gamma\, \Delta s_i$. Tomemos un punto arbitrario de abscisa ξ_i en cada parte de la curva Δs_i. Representando cada parte de la curva Δs_i como un punto material $P_i\,[\xi_i, f(\xi_i)]$ de masa $\gamma\,\Delta s_i$, y, sustituyendo en las fórmulas (1) y (2) x_i e y_i respectivamente por los valores ξ_i y $f(\xi_i)$ así como m_i por el valor $\gamma\,\Delta s_i$ (la masa de la parte Δs_i), obtenemos las fórmulas aproximadas para determinar el centro de gravedad de la curva:

$$x_c \approx \frac{\sum \xi_i \gamma \Delta s_i}{\sum \gamma \Delta s_i}, \qquad y_c \approx \frac{\sum f(\xi_i)\, \gamma \Delta s_i}{\sum \gamma \Delta s_i}.$$

---

*) Por densidad lineal se entiende la masa de la unidad de longitud de la curva dada. Suponemos que la densidad lineal es igual en todos los puntos de la curva.

Si la función $y = f(x)$ es continua igual que su derivada, las sumas del numerador y del denominador de cada fracción, para máx $\Delta s_i \to 0$, tienen sus límites iguales a los límites de las sumas integrales correspondientes. De este modo, las coordenadas del centro de gravedad de la curva se expresan por las integrales definidas:

$$x_c = \frac{\int_a^b x\,ds}{\int_a^b ds} = \frac{\int_a^b x\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx}{\int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx}, \tag{1'}$$

$$y_c = \frac{\int_a^b f(x)\,ds}{\int_a^b ds} = \frac{\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx}{\int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx}. \tag{2'}$$

Ejemplo 1. Hallar las coordenadas del centro de gravedad de la semicircunferencia $x^2 + y^2 = a^2$, dispuesta por arriba del eje Ox.

Solución. Hallemos la abscisa del centro de gravedad:

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}, \quad ds = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

$$ds = \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx, \quad x_c = \frac{a\int_{-a}^{a}\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}}{a\int_{-a}^{a}\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}} = \frac{-a\sqrt{a^2-x^2}\,\Big|_{-a}^{a}}{a \operatorname{arcsen}\frac{x}{a}\Big|_{-a}^{a}} = \frac{0}{\pi a} = 0.$$

Determinemos, ahora, la ordenada del centro de gravedad:

$$y_c = \frac{\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx}{\pi a} = \frac{a\int_{-a}^{a}dx}{\pi a} = \frac{2a^2}{\pi a} = \frac{2a}{\pi}.$$

2. Centro de gravedad de una figura plana. Supongamos que la figura dada, limitada por las curvas $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, $x = a$, $x = b$, represente una figura plana material. Consideremos que la densidad superficial (es decir, la masa de una unidad de área de la superficie) es constante e igual a δ en toda la figura.

Dividamos la figura dada, mediante las líneas rectas $x = a$, $x = x_1, \ldots, x = x_n = b$ en bandas paralelas cuyas anchuras son $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$.

La masa de cada banda será igual al producto de su área por la densidad δ. Al cambiar cada banda por un rectángulo (fig. 242) de base Δx_i, y altura $f_2(\xi_i) - f_1(\xi_i)$, donde $\xi_i = \frac{x_{i-1}+x_i}{2}$, la masa de esta banda será, aproximadamente igual a:

$$\Delta m_i = \delta\,[f_2(\xi_i) - f_1(\xi_i)]\,\Delta x_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

El centro de gravedad de esta banda se encuentra, aproximadamente, en el centro del rectángulo correspondiente:

$$(x_i)_c = \xi_i;\ (y_i)_c = \frac{f_2(\xi_i) + f_1(\xi_i)}{2}.$$

Sustituyendo, ahora, cada banda por un punto material y localizando la masa de cada banda en su centro de gravedad encontremos

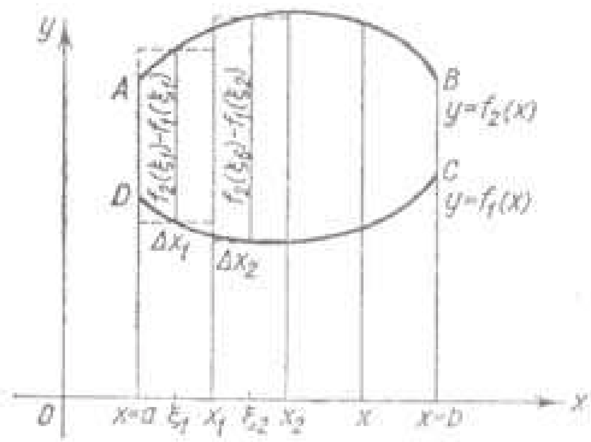

Fig. 242

el valor aproximado de las coordenadas del centro de gravedad de toda la figura (en virtud de las fórmulas (1) y (2)):

$$x_c \approx \frac{\sum \xi_i \delta\,[f_2(\xi_i) - f_1(\xi_i)]\,\Delta x_i}{\sum \delta\,[f_2(\xi_i) - f_1(\xi_i)]\,\Delta x_i},$$

$$y_c \approx \frac{\frac{1}{2}\sum [f_2(\xi_i) + f_1(\xi_i)]\,\delta\,[f_2(\xi_i) - f_1(\xi_i)]\,\Delta x_i}{\sum \delta\,[f_2(e_i) - f_1(e_i)]\,\Delta x_i}.$$

Pasando al límite para $\Delta x_i \to 0$, obtenemos las coordenadas exactas del centro de gravedad de la figura dada:

$$x_c = \frac{\int_a^b x\,[f_2(x) - f_1(x)]\,dx}{\int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]\,dx}; \quad y_c = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b [f_2(x) + f_1(x)][f_2(x) - f_1(x)]\,dx}{\int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]\,dx}.$$

Estas fórmulas se verifican para toda figura plana homogénea (es decir, aquélla que tiene densidad constante en todos los puntos).

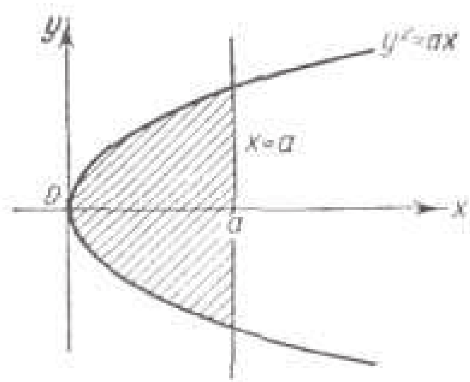

Fig. 243

Como vemos, las coordenadas del centro de gravedad no dependen de la densidad δ de la figura (δ se ha eliminado en el proceso de cálculo).

Ejemplo 2. Determinar las coordenadas del centro de gravedad de un segmento de parábola $y^2 = ax$, cortada por la recta $x = a$ (fig. 243).

Solución. En el caso dado: $f_2(x) = \sqrt{ax}$, $f_1(x) = -\sqrt{ax}$; entonces:

$$x_c = \frac{2\int_0^a x\sqrt{ax}\,dx}{2\int_0^a \sqrt{ax}\,dx} = \frac{\frac{2}{5}\,2\sqrt{a}\,x^{5/2}\Big|_0^a}{2\sqrt{a}\,\frac{2}{3}\,x^{3/2}\Big|_0^a} = \frac{\frac{4}{5}\,a^3}{\frac{4}{3}\,a^2} = \frac{3}{5}\,a,$$

$y_c = 0$ (puesto que el segmento es simétrico respecto al eje Ox).

§ 9. CALCULO DEL MOMENTO DE INERCIA DE UNA LINEA, DE UN CIRCULO Y DE UN CILINDRO MEDIANTE LA INTEGRAL DEFINIDA

Sea dado en el plano XOY un sistema de puntos materiales

$$P_1(x_1, y_1),\ P_2(x_2, y_2),\ \ldots,\ P_n(x_n, y_n)$$

cuyas masas son $m_1, m_2, \ldots, m_n$. Como es sabido por el curso de la mecánica, el momento de inercia del sistema de puntos materiales respecto al punto O se determina del modo siguiente:

$$I_0 = \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 + y_i^2)\, m_i \tag{1}$$

ó

$$I_0 = \sum_{i=1}^{n} r_i^2 m_i, \tag{1'}$$

donde:

$$r_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2}.$$

Igual que en § 8 la curva AB está dada por la ecuación $y = f(x)$ $a \leqslant x \leqslant l$.

Supongamos que esta curva AB es una línea material y que su densidad lineal es igual a γ. Dividamos otra vez más la línea en n partes de longitudes $\Delta s_1, \Delta s_2, \ldots, \Delta s_n$ donde $\Delta s_i \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}$. Las masas de estas partes son iguales a los productos de sus longitudes por la densidad:

$$\Delta m_i = \gamma\, (\Delta s_1,\ \Delta s_2,\ \ldots,\ \Delta s_n).$$

Tomemos un punto arbitrario de abscisa ξ_i en cada parte de la curva. La ordenada de este punto será $\eta_i = f(\xi_i)$.

El momento de inercia de la curva respecto al punto O, en virtud de la fórmula (1), aproximadamente será

$$I_0 = \sum_{i=1}^{n} (\xi_i^2 + \eta_i^2)\ \gamma \Delta s_i. \tag{2}$$

Si la función $y = f(x)$ y su derivada $f'(x)$ son continuas, entonces, para $\Delta s_i \to 0$, la suma (2) tiene límite. Este último, que se expresa mediante la integral definida, determina el momento de inercia de la línea material:

$$I_0 = \gamma \int_0^{a} [x^2 + f(x)^2] \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx. \tag{3}$$

Momento de inercia de una barra homogénea de longitud l respecto a su extremo. Hagamos coincidir la barra con el segmento del eje Ox $(0 \leqslant x \leqslant l)$ (fig. 243').

En este caso

$$\Delta s_i = \Delta x_i,$$
$$\Delta m_i = \gamma \Delta x_i, \qquad r_i^2 = x_i^2.$$

La fórmula (3) toma la forma:

$$I_{0l} = \gamma \int_0^l x^2\, dx = \gamma \frac{l^3}{3}. \tag{4}$$

Dada la masa M de la barra, entonces $\gamma = \frac{M}{l}$, y la fórmula (4) toma la forma:

$$I_{0l} = \frac{1}{3} Ml^2. \tag{5}$$

Momento de inercia de un anillo de radio r respecto al centro. Puesto que los puntos del anillo se encuentran a la distancia r del

Fig. 243'

centro a, y la masa del anillo $m = 2\pi r\gamma$, el momento de inercia del anillo será:

$$I_{0a} = mr^2 = \gamma 2\pi r \cdot r^2 = \gamma 2\pi r^3. \tag{6}$$

Momento de inercia del círculo homogéneo de radio R respecto al centro. Sea δ la masa de una unidad del área del círculo. Dividamos el círculo en n anillos (fig. 243").

Examinemos uno de los anillos. Sea r_i su radio interior y $r_i + \Delta r_i$ el radio exterior. La masa Δm_i de este anillo, calculada con exactitud hasta infinitesimales de orden superior respecto a Δr_i será:

$$\Delta m_i = \delta \cdot 2\pi r_i \Delta r_i.$$

En virtud de la fórmula (6) el momento de inercia de su masa respecto al centro será, aproximadamente, igual a

$$(\Delta J_0)_i \approx \delta 2\pi r_i\, \Delta r_i \cdot r_i^2 = \delta 2\pi r_i^3\, \Delta r_i.$$

El momento de inercia de todo el círculo, como el sistema de anillos, se expresará mediante la fórmula:

$$J_0 \approx \sum_{i=1}^{n} \delta 2\pi r_i^3 \cdot \Delta r_i. \tag{7}$$

Pasando al límite, para máx $\Delta r_i \to 0$, obtendremos el momento

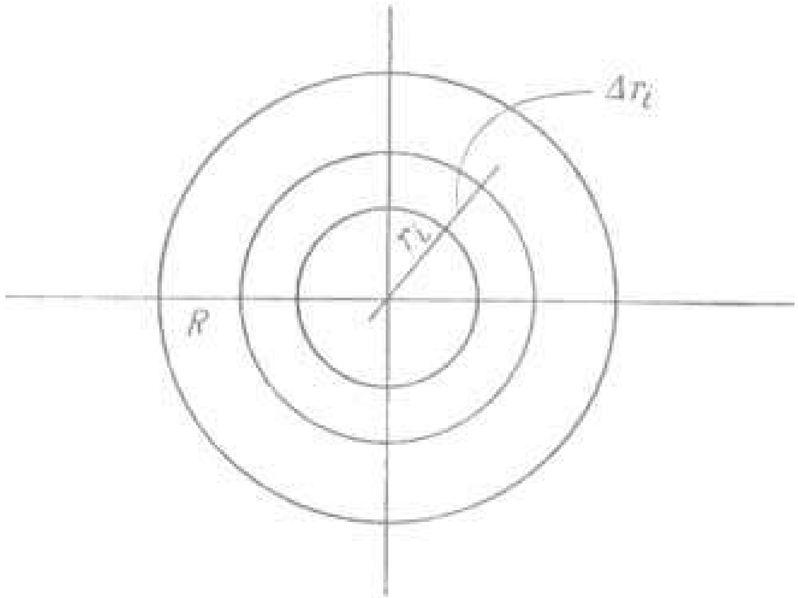

Fig. 243

de inercia del área del círculo respecto a su centro:

$$J_0 = \delta 2\pi \int_0^R r^3\,dr = \pi\delta \frac{R^4}{2}. \tag{8}$$

Dada la masa M del círculo, la densidad superficial δ es

$$\delta = \frac{M}{\pi R^2}.$$

Introduciendo este valor en (8), obtenemos en definitiva:

$$I_0 = M\frac{R^2}{2}. \tag{9}$$

Es evidente que si tenemos un cilindro recto de radio R y masa M, entonces su momento de inercia respecto al eje se expresará por la fórmula (9).